第11章 应力状态和强度理论

§11.3 平面应力状态应力分析的图解法

目录

CONTENTS

一、应力圆

将斜截面应力计算公式改写为

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

把上面两式等号两边平方，然后相加便可消去α，得

$$(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$$

因为σ_x，σ_y，τ_{xy}皆为已知量，所以上式是一个以σ_α，τ_α为变量的圆周方程。当斜截面随方位角 α 变化时，其上的应力σ_α，τ_α在σ-τ直角坐标系内的轨迹是一个圆。

1.圆心的坐标

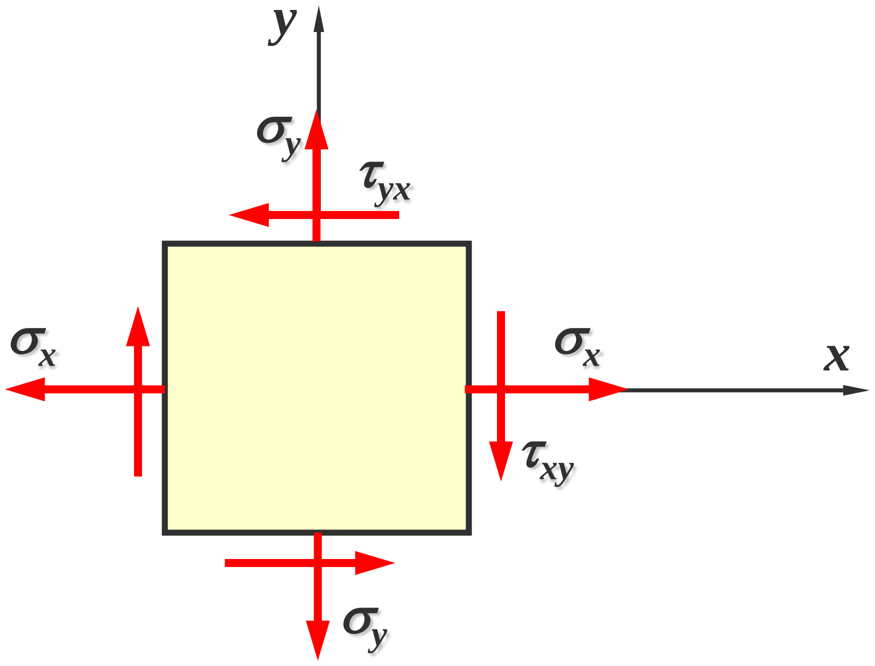
$$C(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$$

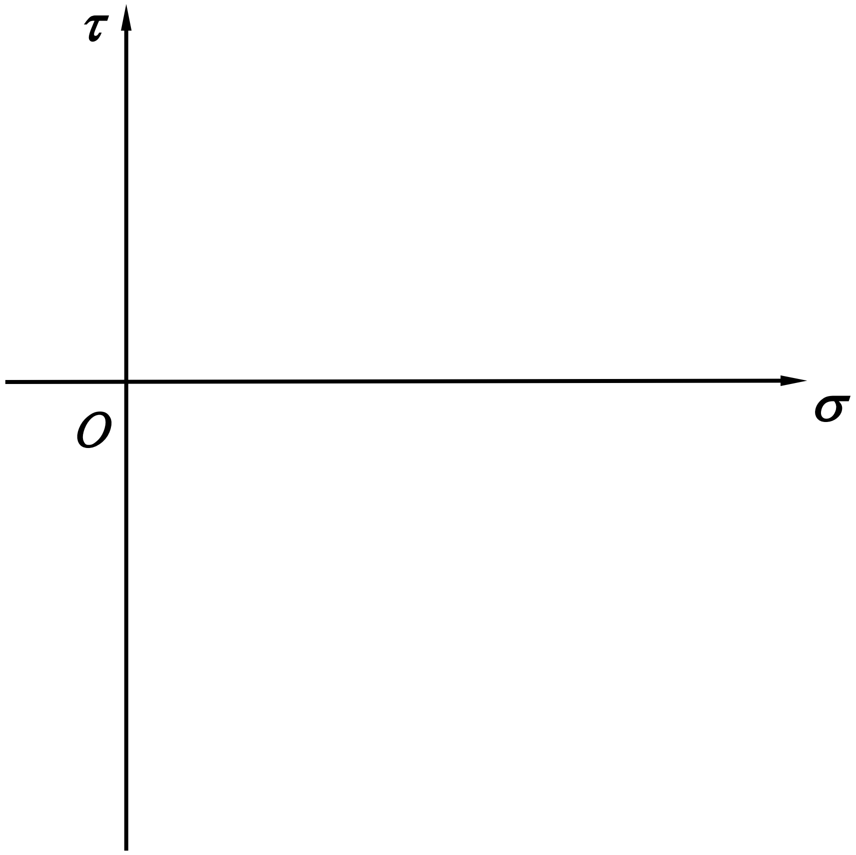
2.圆的半径

$$R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

此圆习惯上称为 *应力圆*，或称为*莫尔圆*

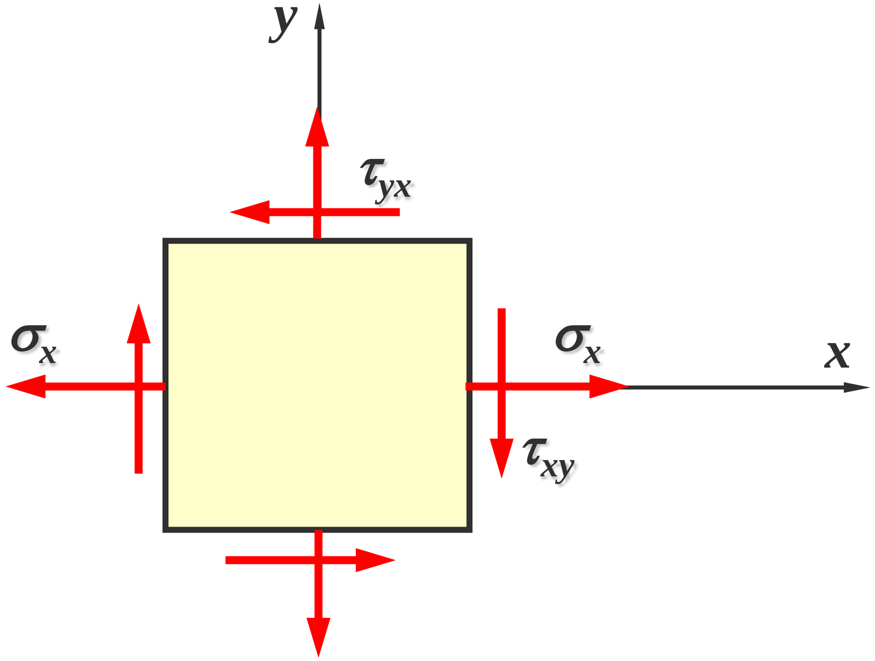
二、应力圆作法

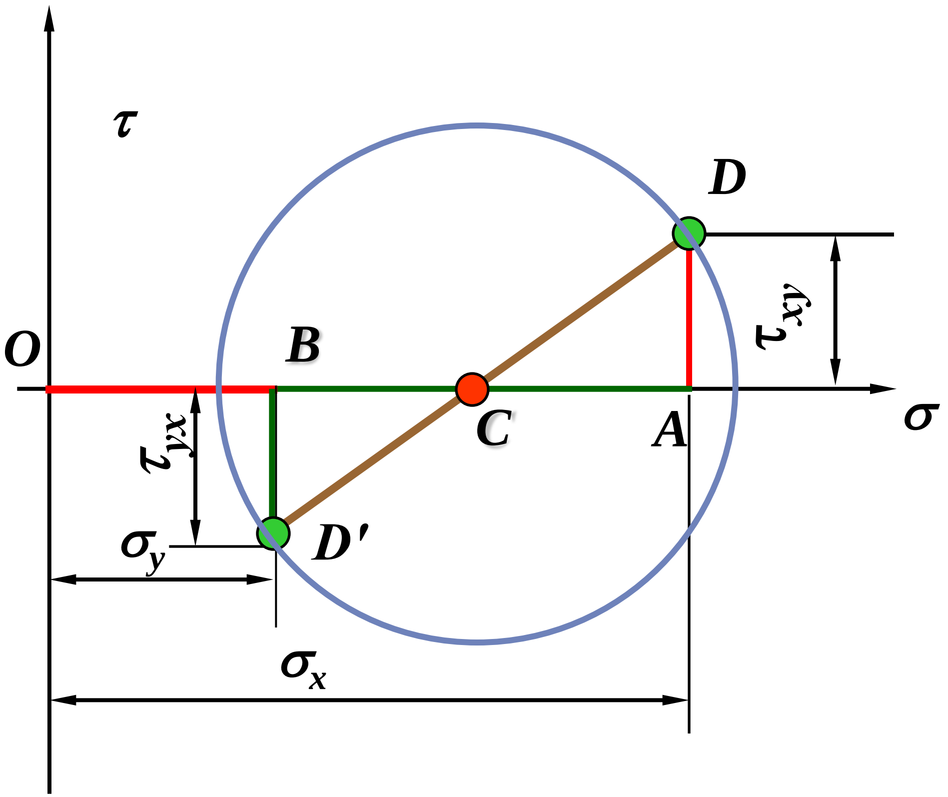




1. 步骤

（1）建 σ- τ 坐标系,选定比例尺





（2）量取　$OA=\sigma_x$

$AD=\tau_{xy}$ 得D点

（3）量取 $OB=\sigma_y$　$BD'=\tau_{yx}$　得D'点

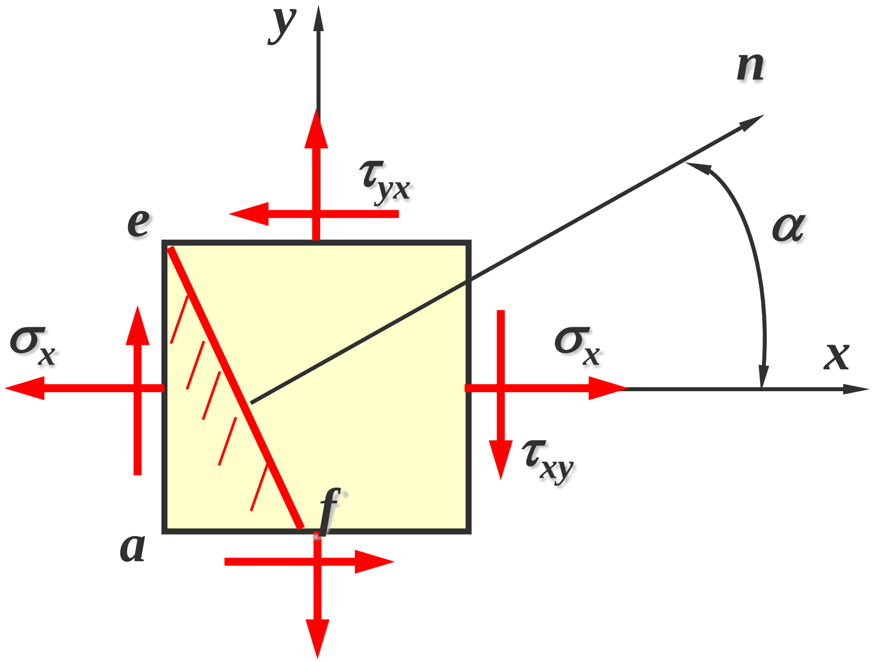
（4）连接 DD'两点的直线与σ轴相交于C 点

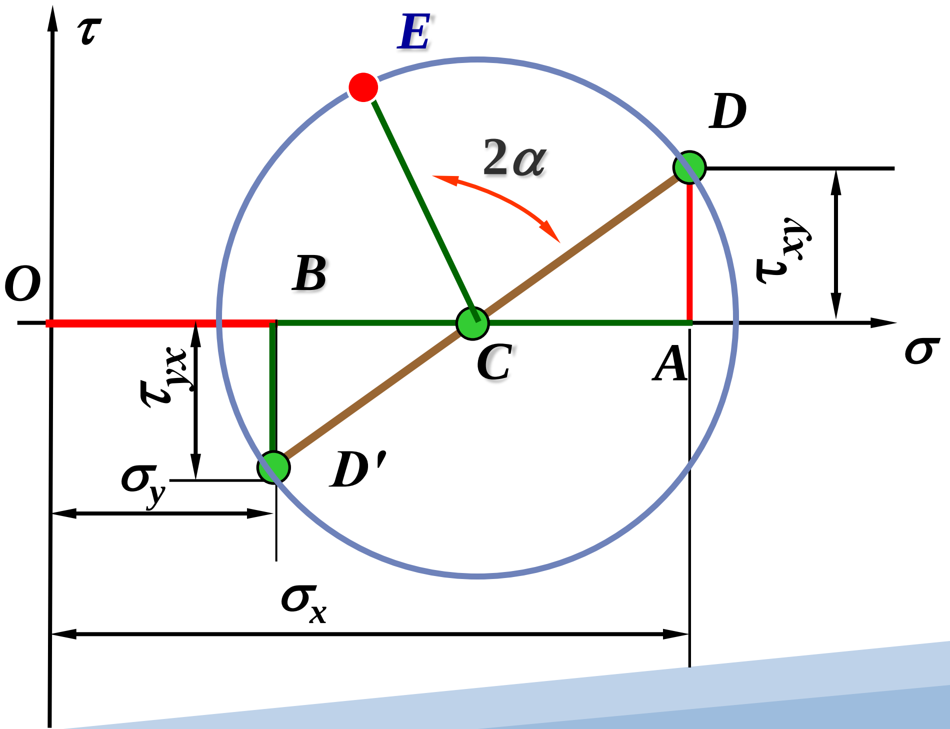
（5）以C为圆心, CD 为半径作圆，该圆就是相应于该单元体的应力圆。

三、应力圆的应用

1. 求单元体上任一截面上的应力

从应力圆的半径 CD 按方位角α的转向转动2α得到半径CE，圆周上 E 点的坐标就依次为斜截面上的正应力σ_α和切应力τ_α。

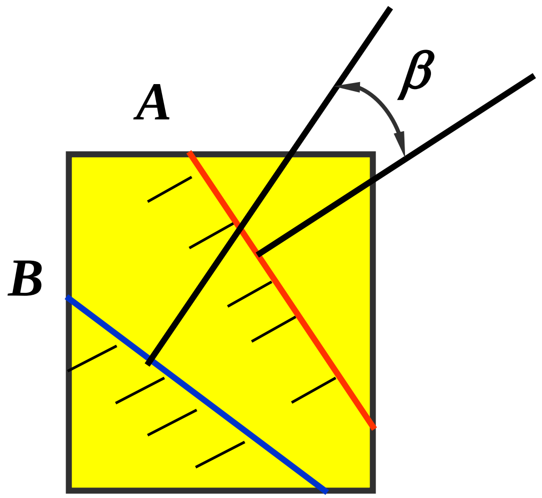


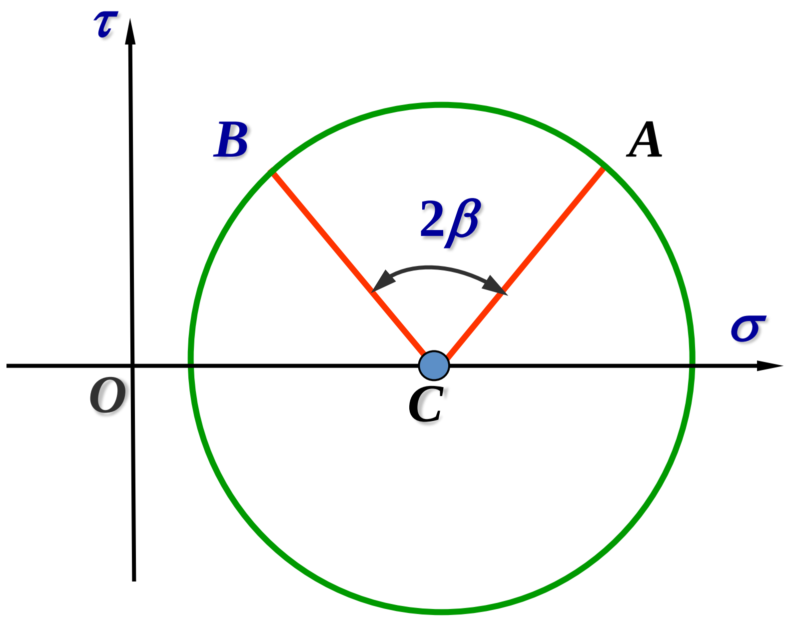


说 明

（1）点面之间的对应关系：单元体某一面上的应力，必对应于应力圆上某一点的坐标。

（2）夹角关系:圆周上任意两点所引半径的夹角等于单元体上对应两截面夹角的两倍，两者的转向一致。

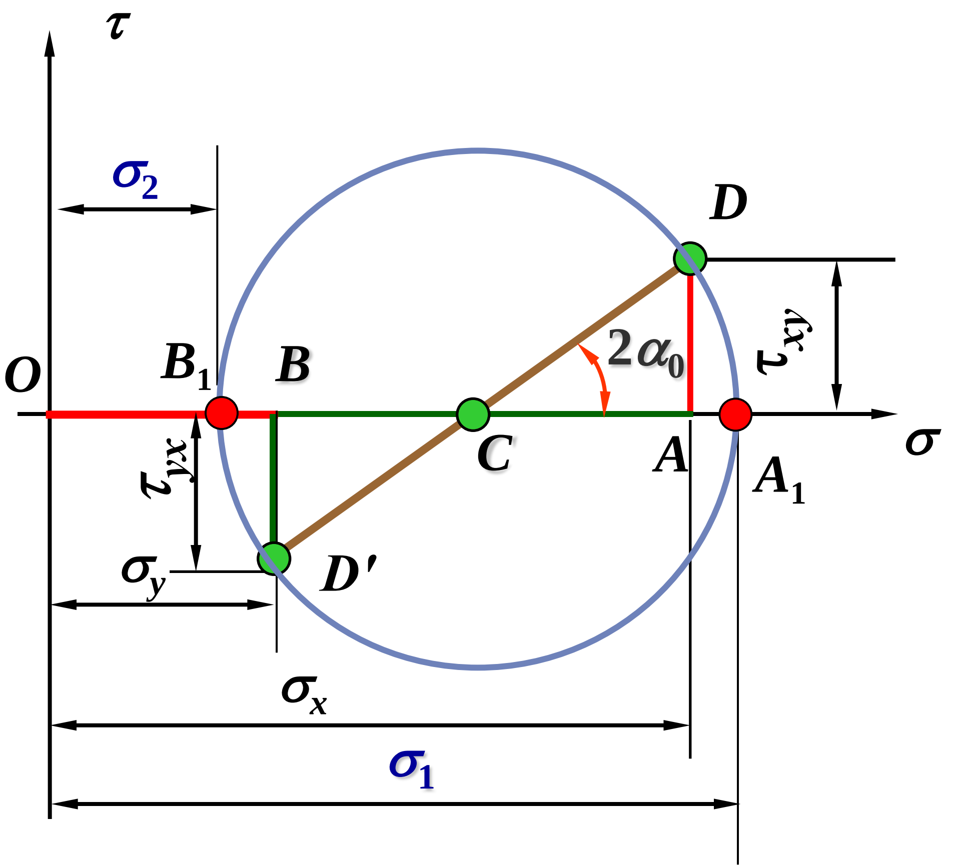




2. 求主应力数值和主平面位置

（1）主应力数值

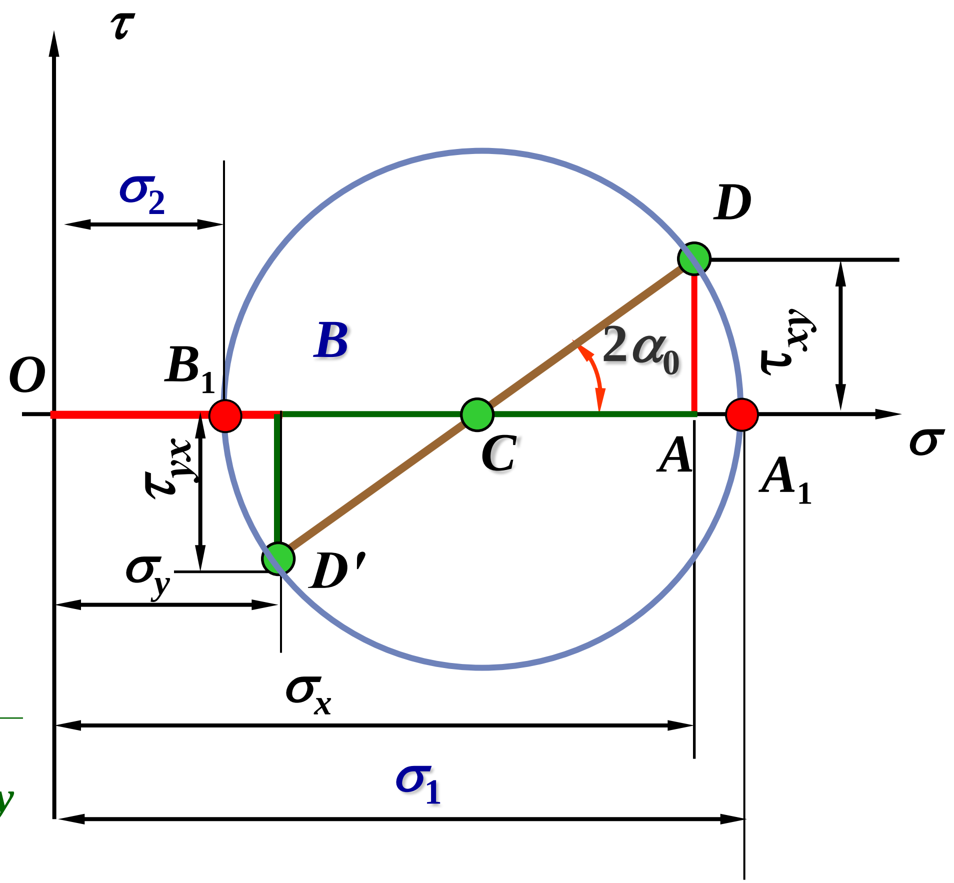
A_1 和 B_1 两点为与主平面对应的点,其横坐标 为主应力 σ_1, σ_2



（2）主平面方位

由 CD顺时针转 $2\alpha_0$ 到CA_1

所以单元体上从 x 轴顺时针转 α_0（负值）即到 σ_1对应的主平面的外法线。

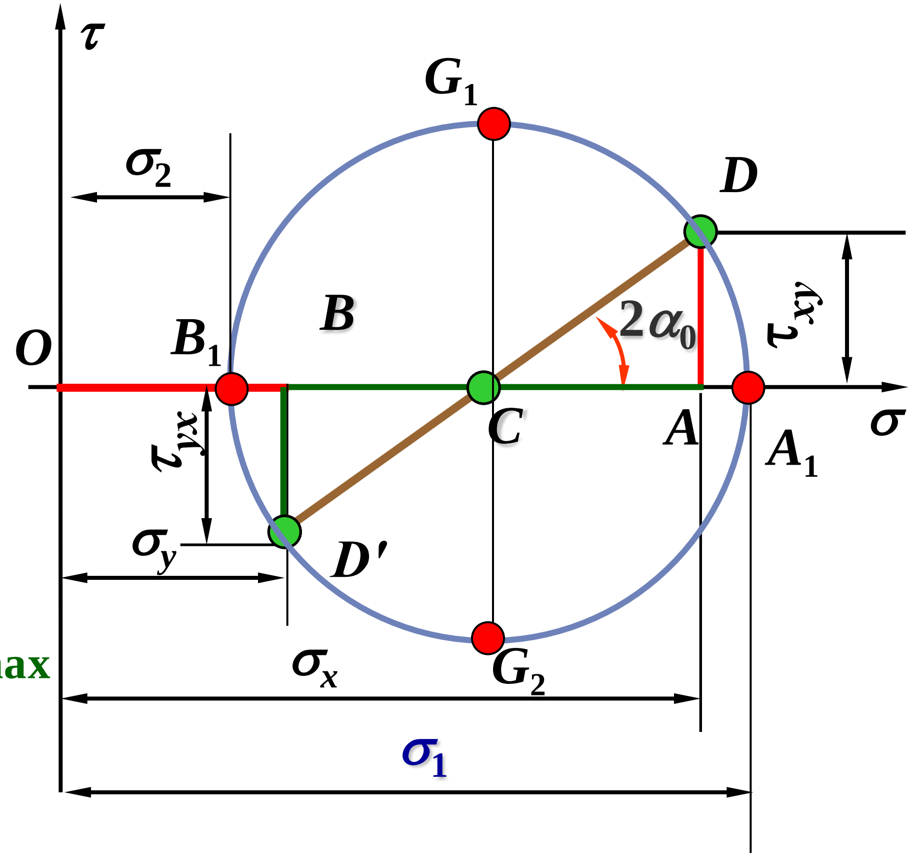


$$\tan(-2\alpha_0)=\frac{\overline{DA}}{\overline{CA}}=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \qquad 2\alpha_0=\arctan\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right)$$

α_0 确定后,σ_1 对应的主平面方位即确定

3. 求最大切应力



G_1和G两点的纵坐标分别代表最大和最小切应力

$$\overline{CG_1} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau_{\max}$$

$$\overline{CG_2} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau_{\min}$$

因为最大、最小切应力等于应力圆的半径 $\left.\begin{cases}\tau_{\max} \\ \tau_{\min}\end{cases}\right\} = \pm\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

例题1　从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，σ_x = -1MPa ，σ_y = - 0.4MPa , τ_{xy} = - 0.2MPa , τ_{yx} = 0.2MPa，

（1）绘出相应的应力圆。

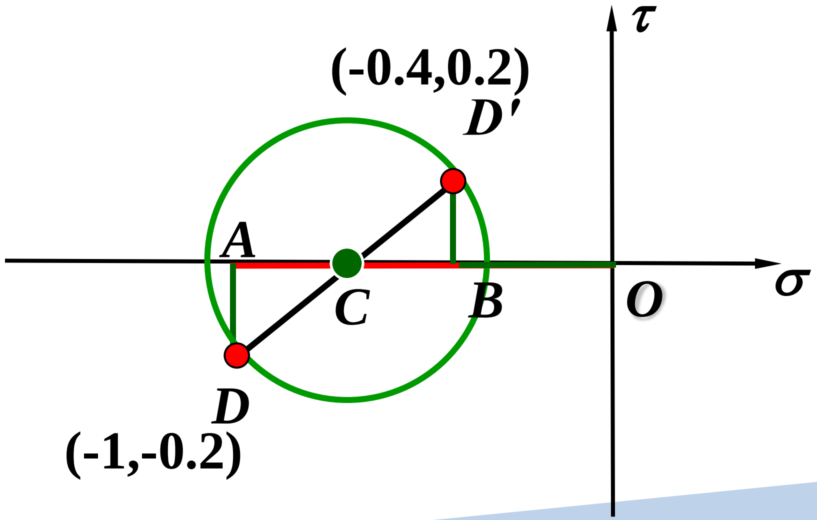
（2）确定此单元体在α =30°和α =-40°两斜面上的应力。

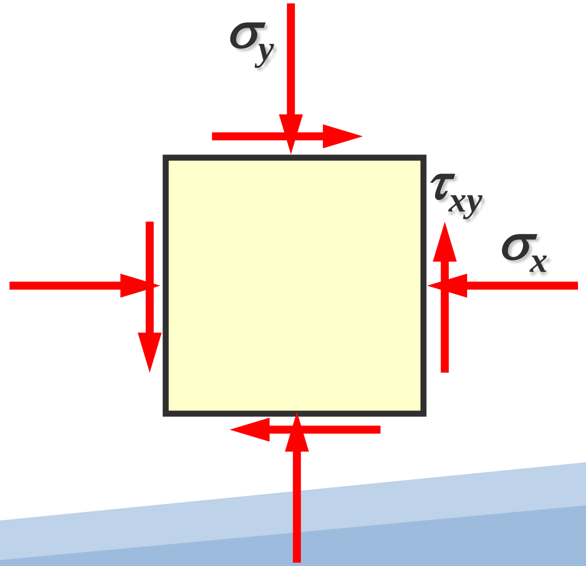
解：（1） 画应力圆

量取$OA = \sigma_x$ = - 1，$AD = \tau_{xy}$ = - 0.2，定出 D点;

$OB = \sigma_y$ = - 0.4和，$BD' = \tau_{yx}$ = 0.2 ， 定出 D'点。

以DD'为直径绘出的圆即为应力圆。





（2）确定 $\alpha = 30^\circ$ 斜截面上的应力

将半径 CD 逆时针转动 $2\alpha = 60^\circ$ 到半径 CE, E 点的坐标就代表 $\alpha = 30^\circ$ 斜截面上的应力。

（3）确定 $\alpha = -40^\circ$ 斜截面上的应力

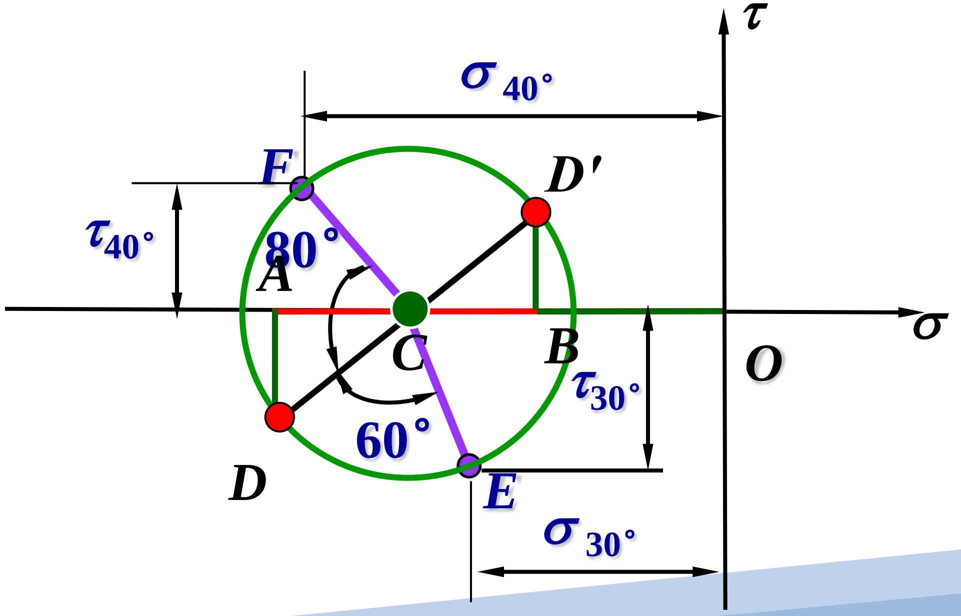
将半径 CD顺时针转 $2\alpha = 80^\circ$ 到半径 CF, F 点的坐标就代表 $\alpha = -40^\circ$ 斜截面上的应力。

$\sigma_{30^\circ} = -0.68\text{MPa}$

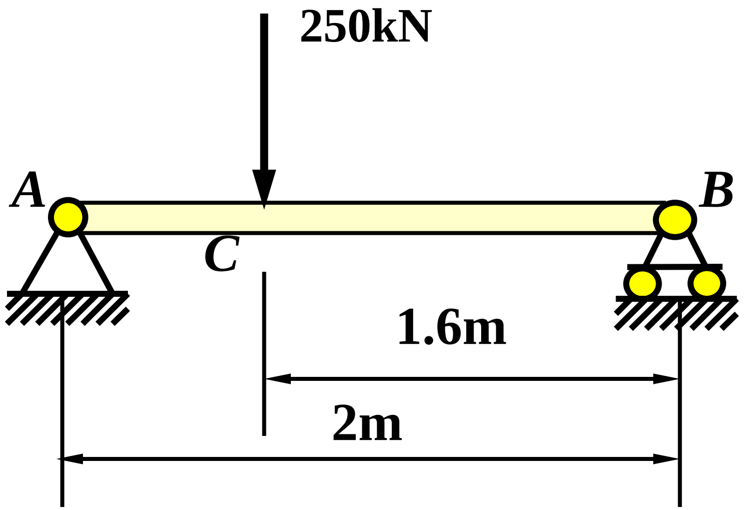
$\tau_{30^\circ} = -0.36\text{MPa}$

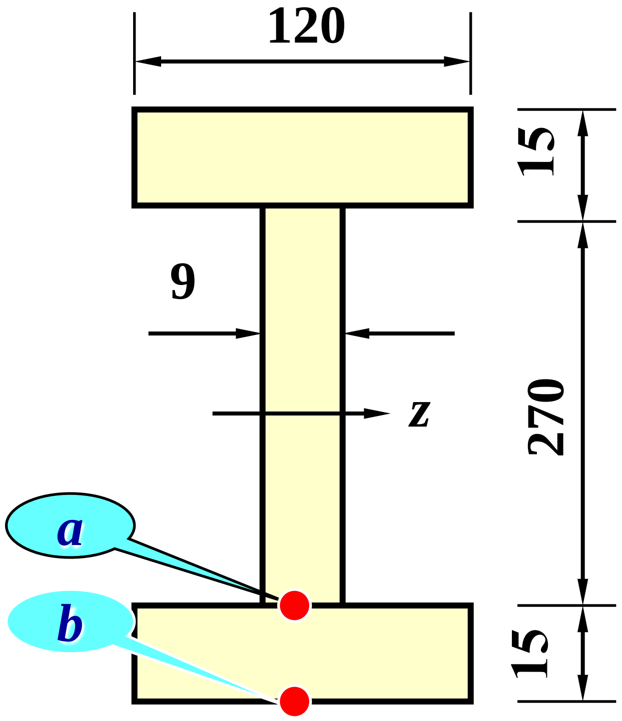
$\sigma_{-40^\circ} = -0.95\text{MPa}$

$\tau_{40^\circ} = -0.26\text{MPa}$



例题2　两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图中。试绘出截面*C*上*a*，*b*两点处的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。





解：（1）首先计算支反力，并作出梁的剪力图和弯矩图。

$$F_{S\max}=F_{C左}=200\ \text{kN}$$

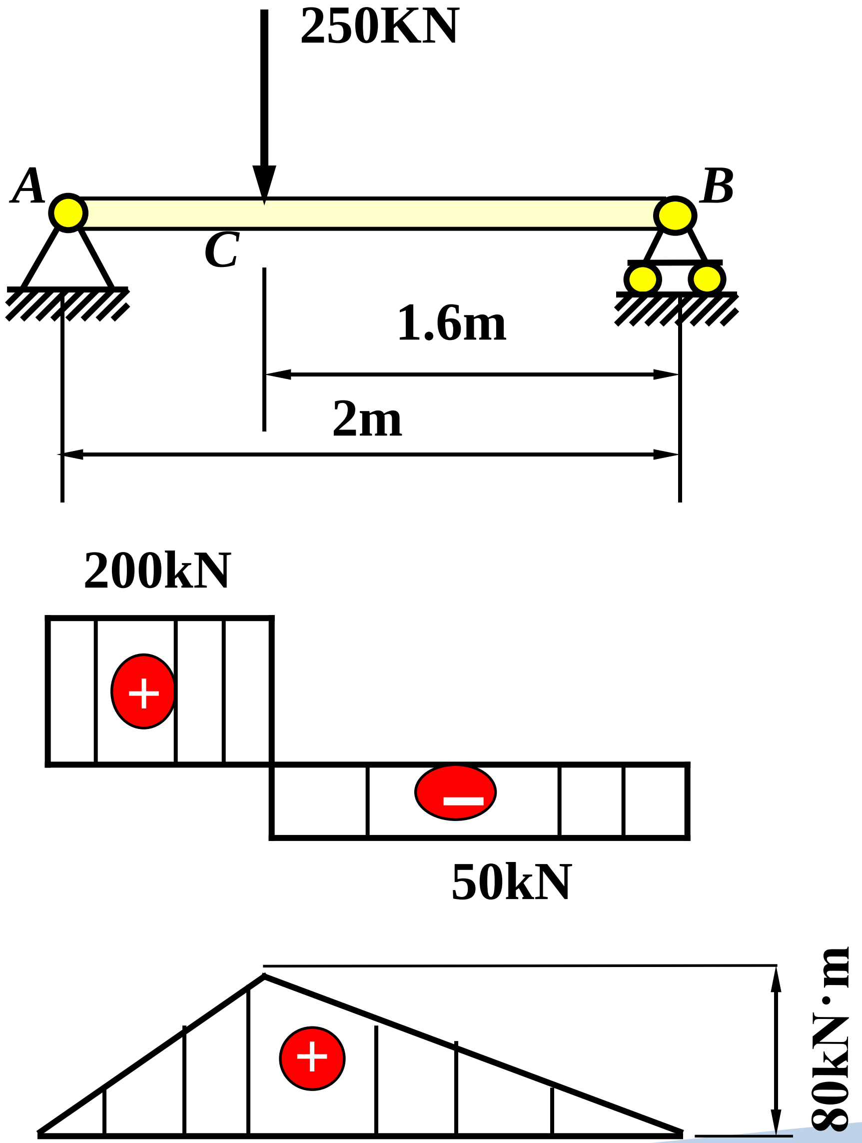
$$M_{\max}=M_C=80\ \text{kN·m}$$

$$\sigma=\frac{My}{I_z}\qquad \tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

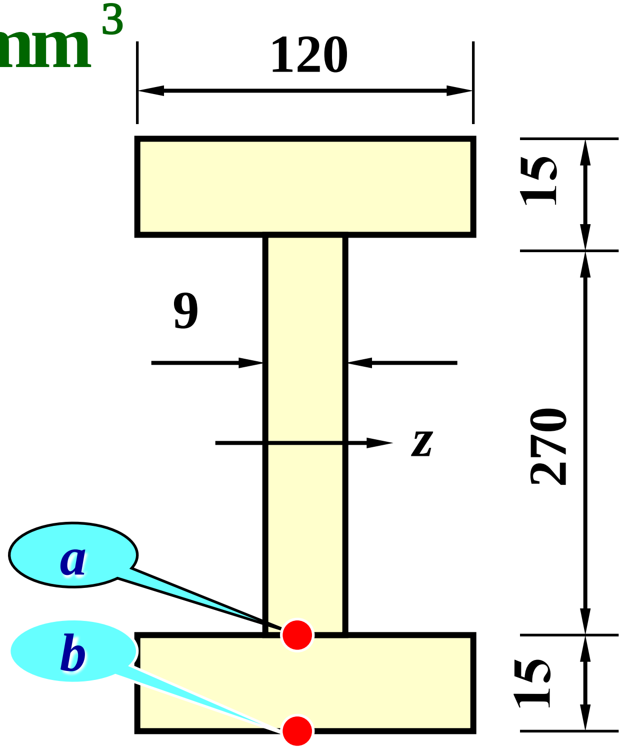
$$I_z=\frac{120\times300^3}{12}-\frac{111\times270^3}{12}$$

$$=88\times10^6\text{mm}^4$$

$$y_a=135\text{mm}$$



$$S_{za}^{*} = 120 \times 15 \times (150 - 7.5) = 256000\text{mm}^3$$

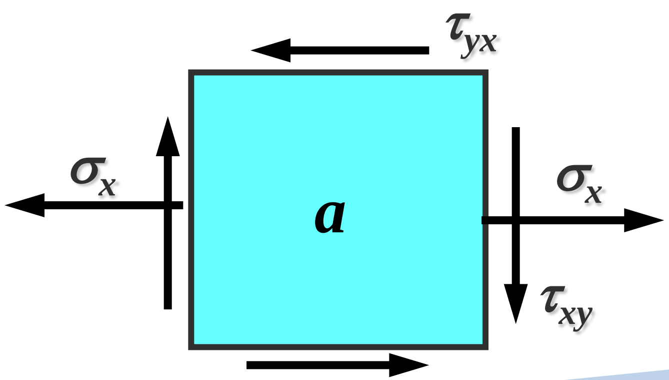


（2）横截面 C上a 点的应力为

$$\sigma_a = \frac{M_C}{I_z} y_a = 122.5\text{MPa}$$

$$\tau_a = \frac{F_S S_{za}^{*}}{I_z d} = 64.6\text{MPa}$$

a点的单元体如图所示



σ_x =122.5MPa，τ_{xy} =64.6MPa

σ_y=0，τ_{xy} =-64.6MPa

（3）做应力圆

σ_x =122.5MPa, τ_{xy} =64.6MPa σ_y=0, τ_{xy} =-64.6MPa

由 σ_x, τ_{xy} 定出D 点　　由σ_y, τ_{yx} 定出D'点

以DD'为直径作应力圆

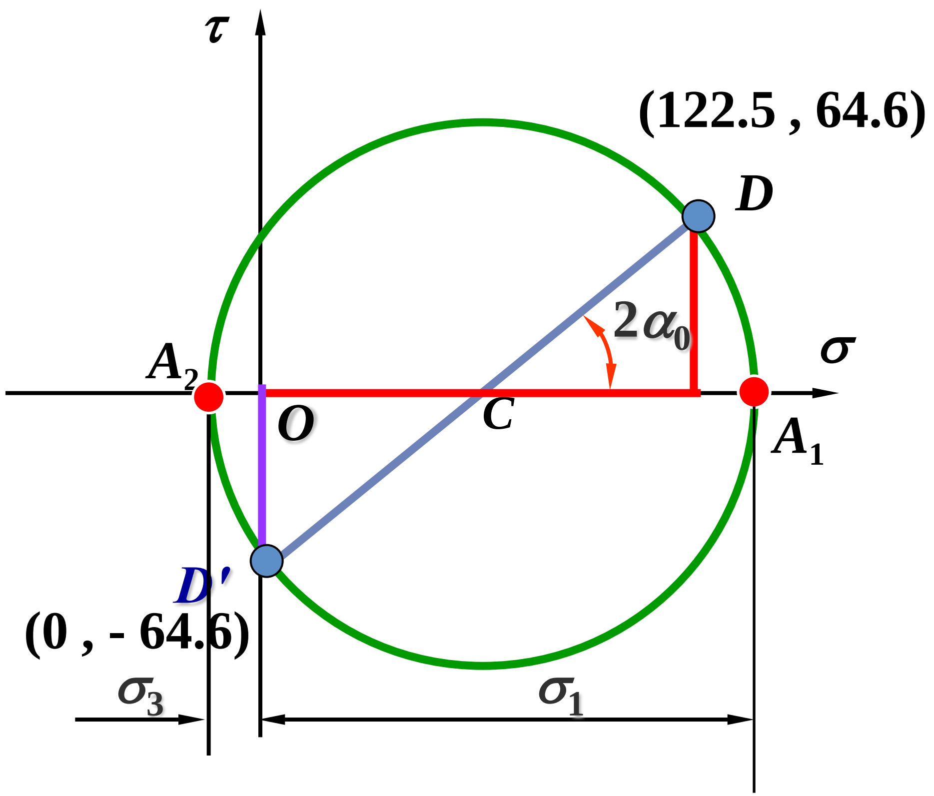
A_1, A_2 两点的横坐标分别代

表 a 点的两个主应力σ_1 和σ_3

$$\sigma_1 = OA_1 = 150\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = OA_2 = -27\text{MPa}$$

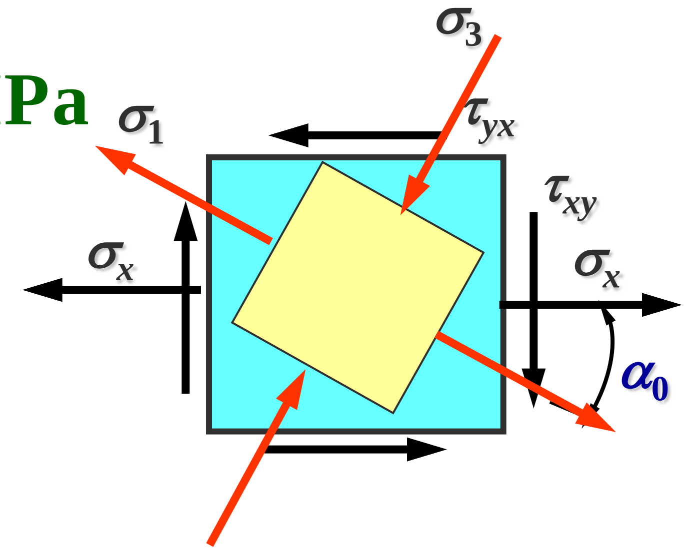
A_1 点对应于单元体上 σ_1所在的主平面



$$2\alpha_0 = -45^\circ \quad \alpha_0 = -22.5^\circ$$

$$\sigma_1 = 150\text{MPa} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -27\text{MPa}$$

$$\alpha_0 = -22.5^\circ$$



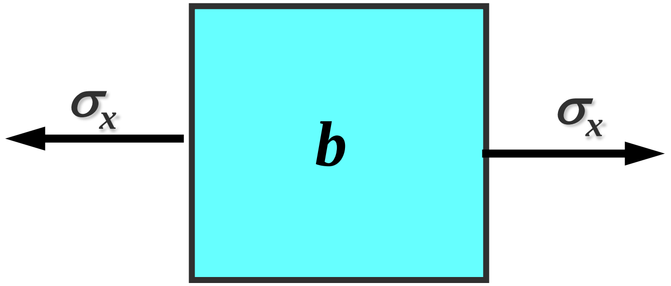
（4）横截面 C上b点的应力

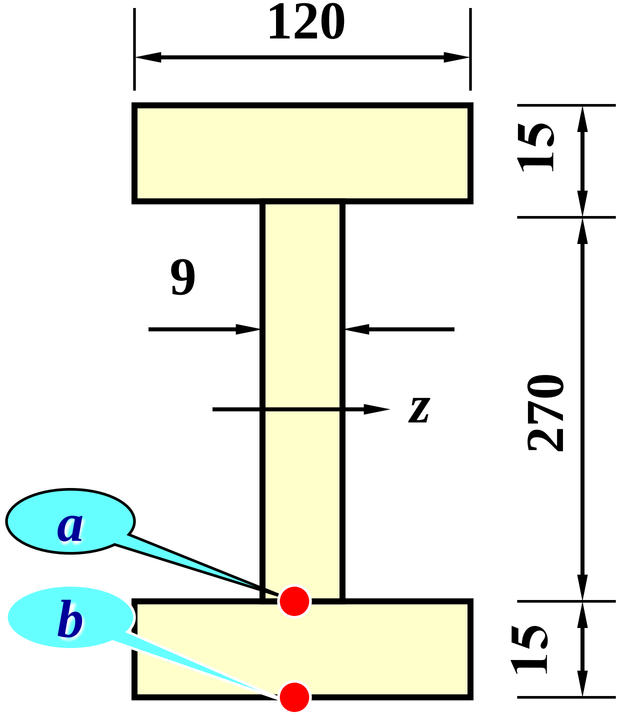
$$y_b = 150\text{mm}$$

$$\sigma_b = \frac{M_C}{I_z} y_b = 136.5\text{MPa}$$

$$\tau_b = 0$$

b点的单元体如图所示

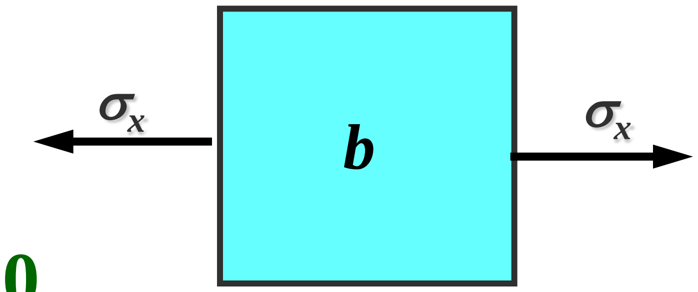


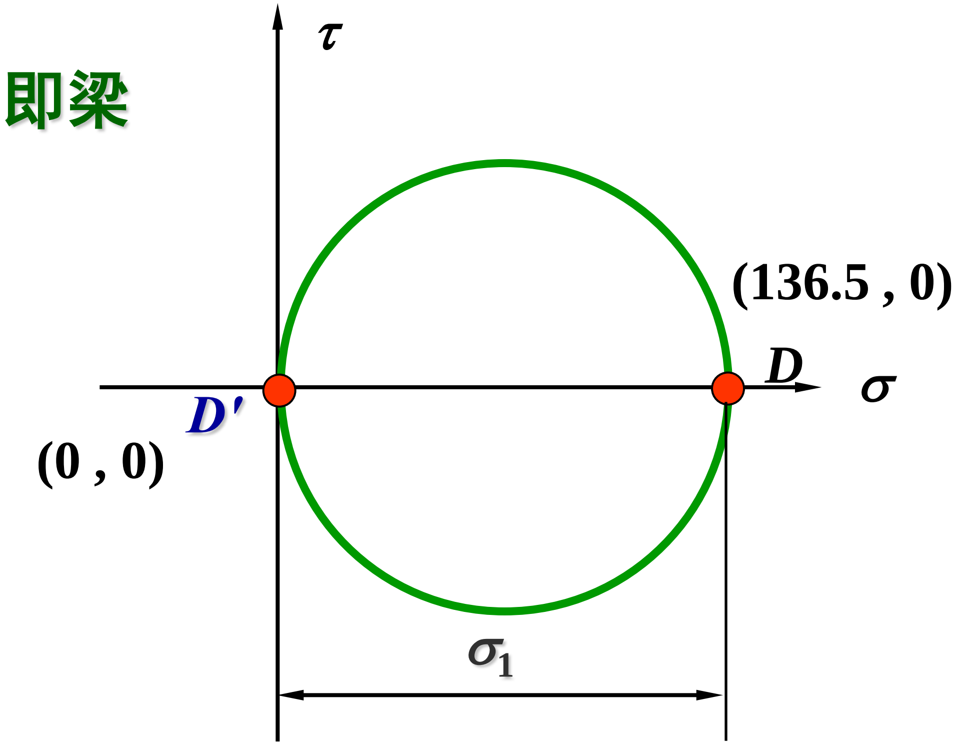


b 点的三个主应力为

$$\sigma_1 = 136.5\text{MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

σ_1所在的主平面就是 x 平面, 即梁的横截面C





本讲小结

1 提出应力圆

2 应力圆的作法

3 应力圆的应用