第9章　弯曲应力

目录

CONTENTS

9.1 纯弯曲

9.2 弯曲正应力的强度条件及其应用

9.3 提高梁弯曲强度的一些措施

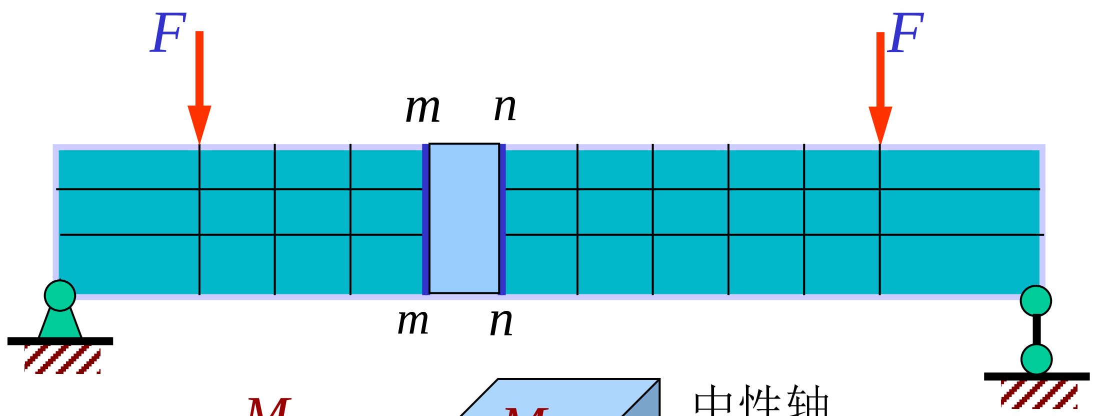
9.2 弯曲正应力的强度条件及其应用

综合考虑

1、变形几何关系

2、物理关系

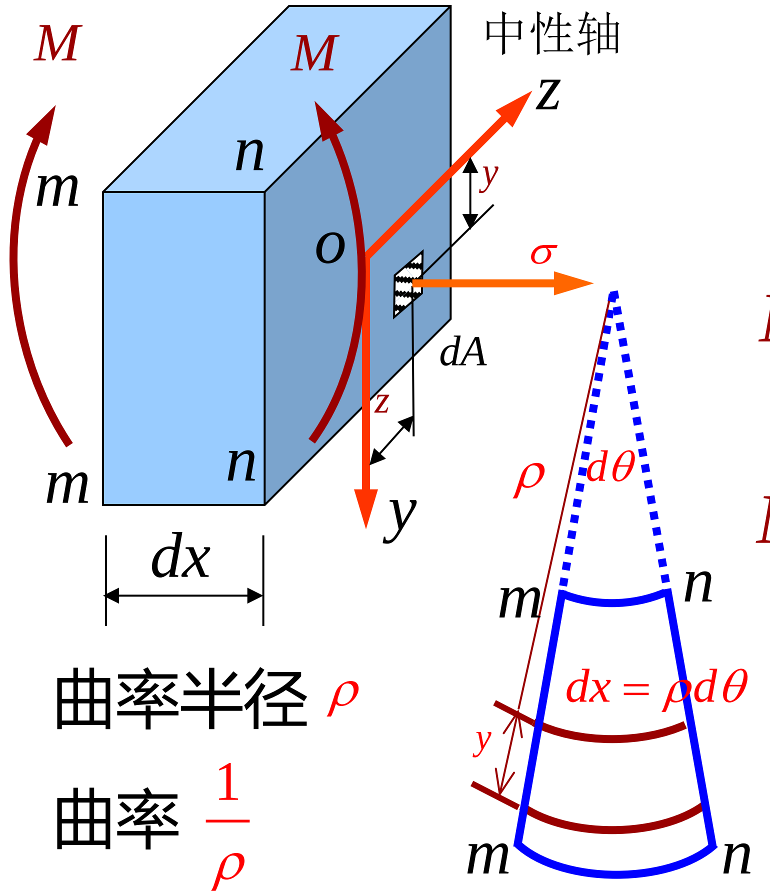
3、静力学关系



$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)\cancel{d\theta} - \rho\cancel{d\theta}}{\rho\cancel{d\theta}} = \frac{y}{\rho}$$

1、变形几何关系

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = \frac{y}{\rho}E}$$



2、物理关系

$$F_N = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A y\,dA = 0$$ **静矩**

$$M_{iy} = \int_A z\sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A zy\,dA = 0$$ **惯性积**

$$M_{iz} = \int_A y\sigma dA = \frac{E}{\rho}\underline{\int_A y^2 dA} = \frac{EI_z}{\rho} = M$$

惯性矩

曲率半径 ρ

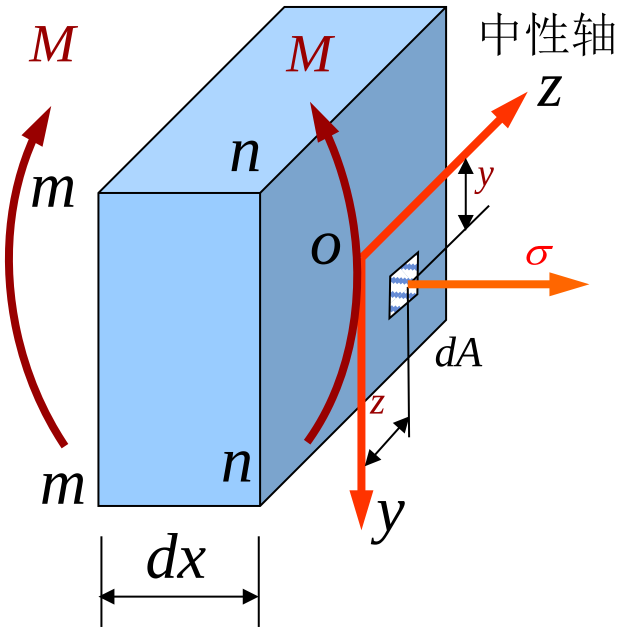
曲率 $\frac{1}{\rho}$

曲率 $\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}}$

抗弯刚度

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

3、静力学关系



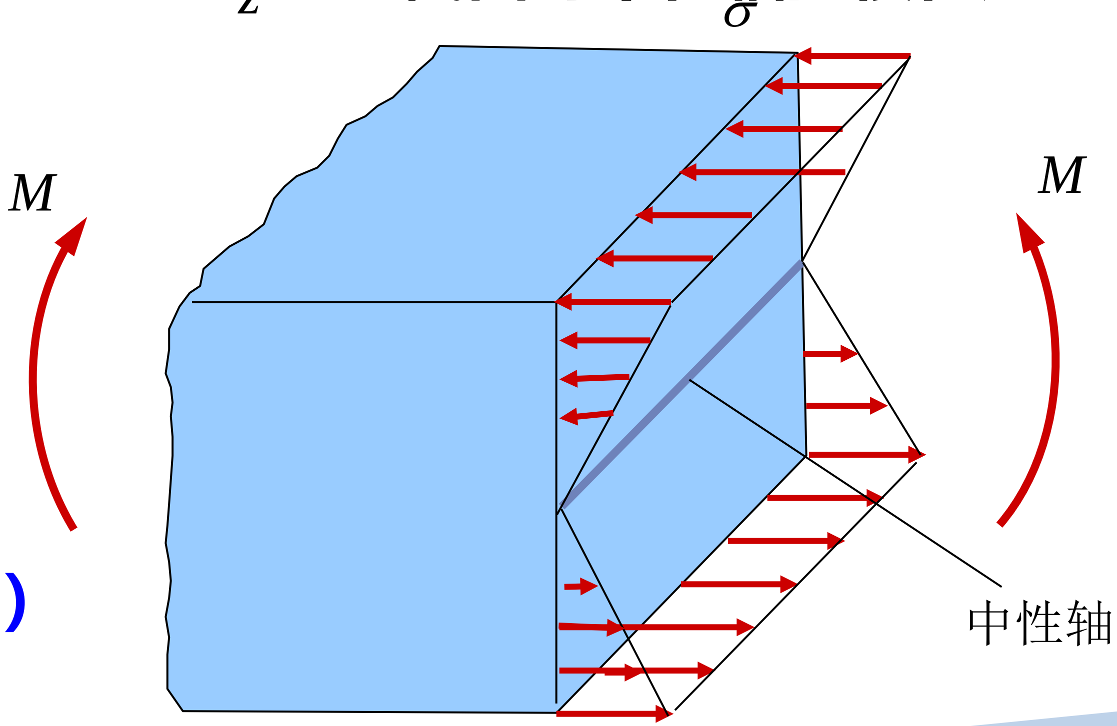
$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

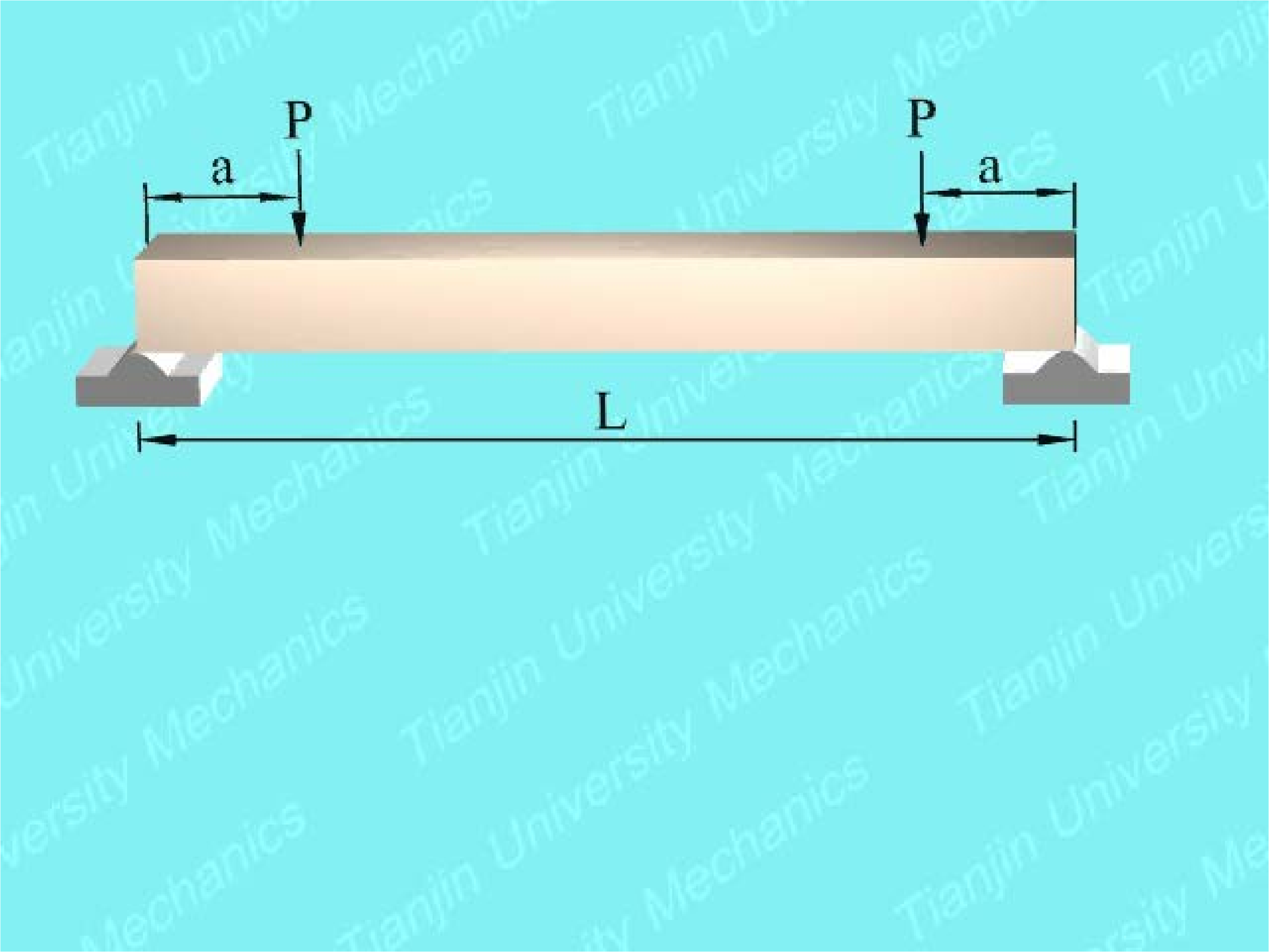
（y 向下为正的原因）

M ——**横截面上的弯矩**

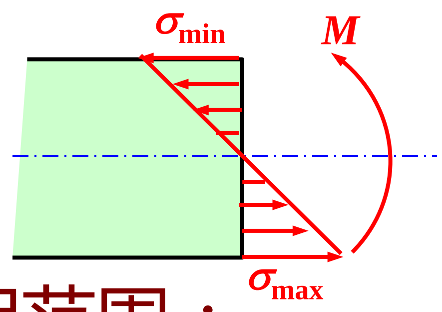
y ——**到中性轴的距离**

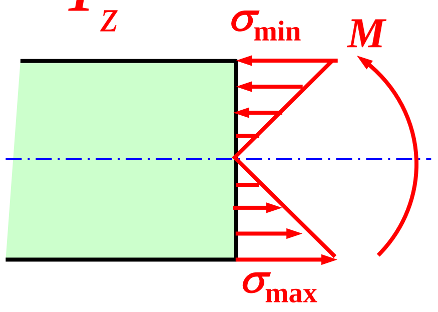
I_z ——**截面对中性轴的惯性矩**

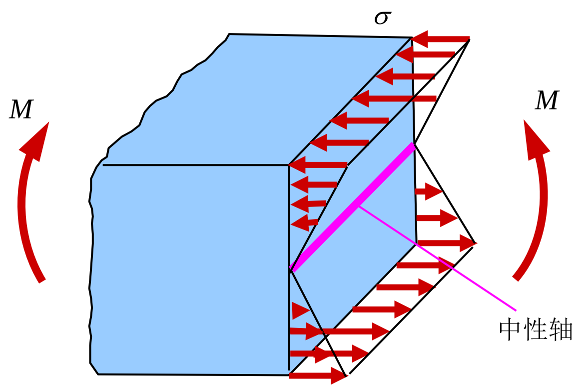



P
a
P
a
L

横截面上正应力的画法： $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$







公式适用范围：

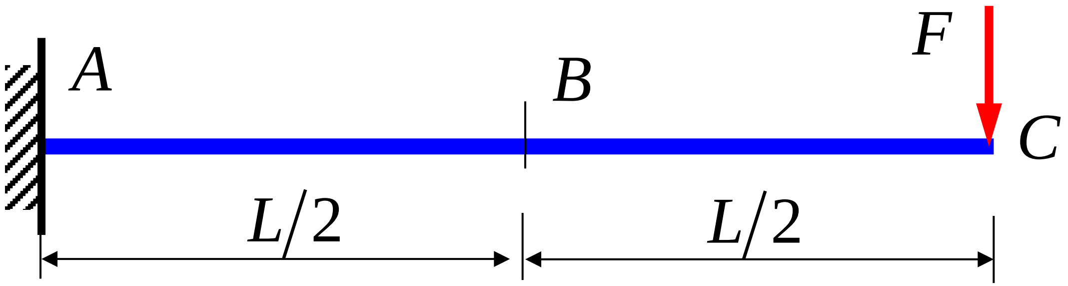
①线弹性范围—正应力小于比例极限σ_p；

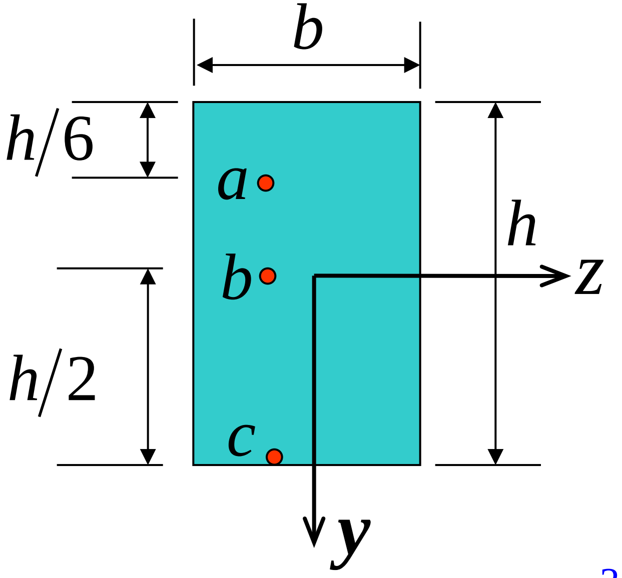
②精确适用于纯弯曲梁；

③对于横力弯曲的细长梁（跨度与截面高度比$L/h>5$），上述公式的误差不大，但公式中的M应为所研究截面上的弯矩，即为截面位置的函数。

$$\sigma = \frac{M(x)y}{I_z} \qquad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

长为 L 的矩形截面悬臂梁，在自由端作用一集中力F，已知$b=120\text{mm}$，$h=180\text{mm}$、$L=2\text{m}$，$F=1.6\text{kN}$，试求B截面上a、b、c各点的正应力。





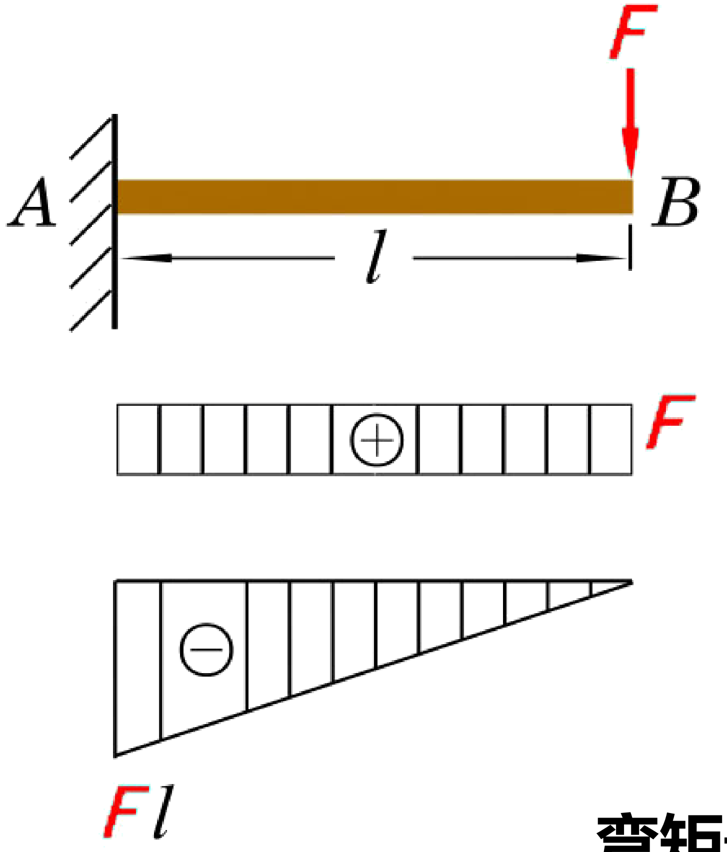
$$\sigma_a=\frac{M_B y_a}{I_z}=\frac{(-\frac{1}{2}FL)(-\frac{h}{3})}{\frac{bh^3}{12}}=1.65\text{ MPa}$$

$$M_B=-\frac{1}{2}FL \qquad I_z=\frac{bh^3}{12}$$

$$\sigma_b=0 \qquad \sigma_c=\frac{M_B y_c}{I_z}=\frac{(-\frac{1}{2}FL)\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}}=-2.47\text{ MPa}（压）$$

纯弯曲正应力分布 $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

纯弯曲, F_S为零,由$dM/dx=F_S=0$,
得弯矩M=常数



弹性力学精确分析表明，当跨度 l 与横截面高度 h 之比 $l/h>5$（细长梁）时，纯弯曲正应力公式对于横力弯曲近似成立。

横力弯曲最大正应力

弯矩最大的截面 $M \rightarrow M_{\max}$

离中性轴最远处 $y \rightarrow y_{\max}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z}$$

横力弯曲最大正应力 $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max} y_{\max}}{I_z}$

引入 截面抗弯系数 $W = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$

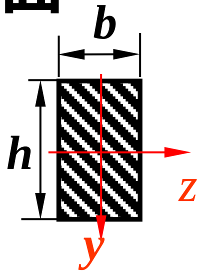
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

类比：扭转 $\tau_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{W_t}$

W_t —**截面抗扭系数**

三种典型截面对中性轴的惯性矩

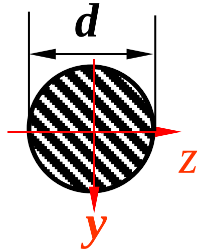
1. 矩形截面



$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

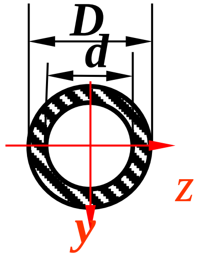
2. 实心圆截面



$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_z = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

3. 截面为外径*D*、内径*d*(α=*d/D*) 的空心圆：



$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$$

$$W_z = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

弯曲正应力的强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} \le [\sigma] \quad \text{或} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \le [\sigma]$$

1. 弯矩最大的截面上

2. 离中性轴最远处

3. 非常规截面或变截面梁要综合考虑 M 与 I_z

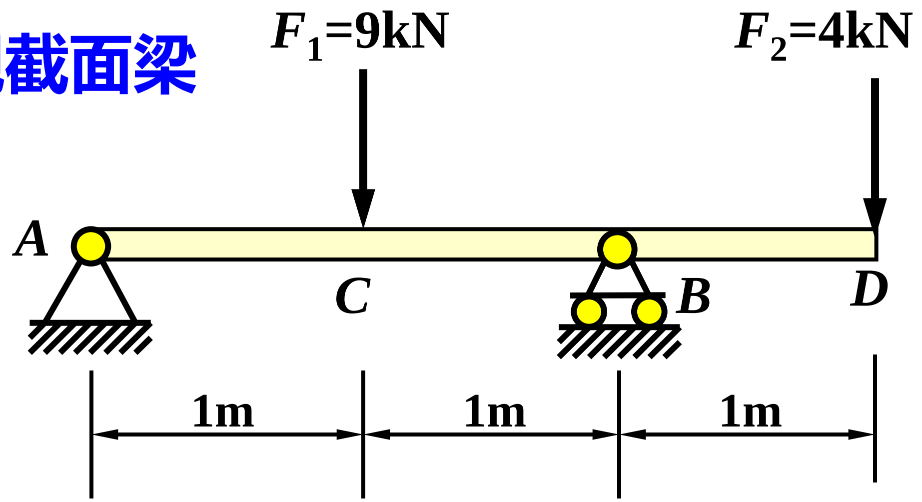
4. 脆性材料抗拉和抗压性能不同，二方面都要考虑

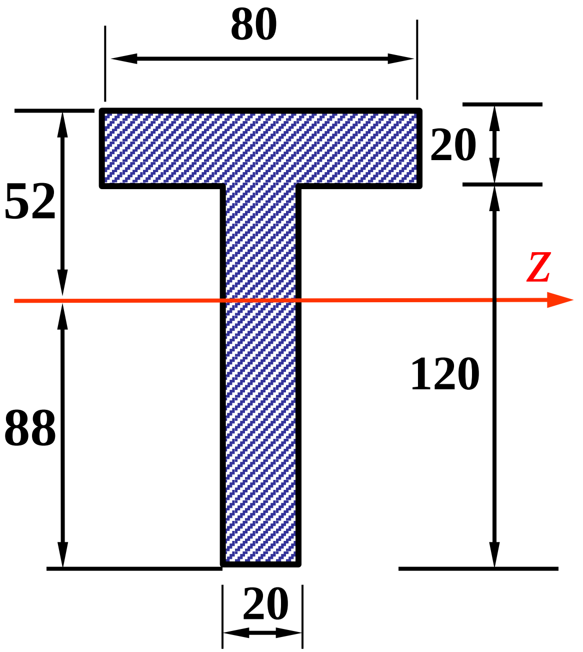
$$\sigma_{t,\max} \le [\sigma_t] \qquad \sigma_{c,\max} \le [\sigma_c]$$

T 型截面铸铁梁，截面尺寸如图示。$[\sigma_t]=30\text{MPa}$，$[\sigma_c]=160\text{MPa}$，

$I_z=7.64\times10^{-6}\text{m}^4$ ，试校核梁的强度。

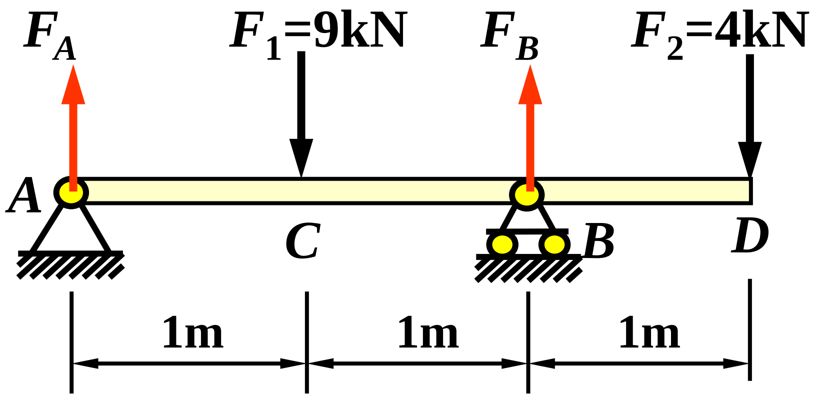
非常规截面梁

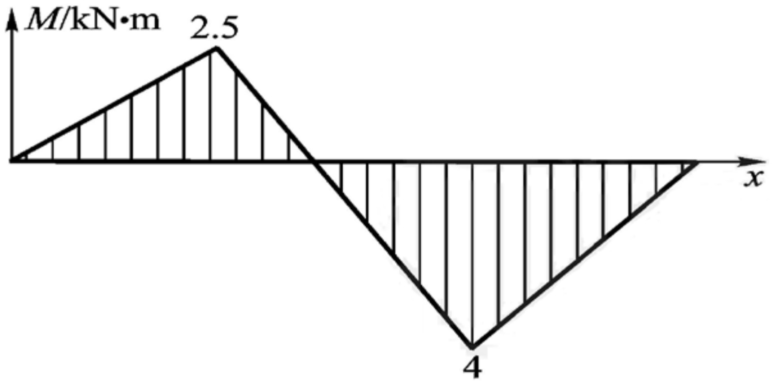


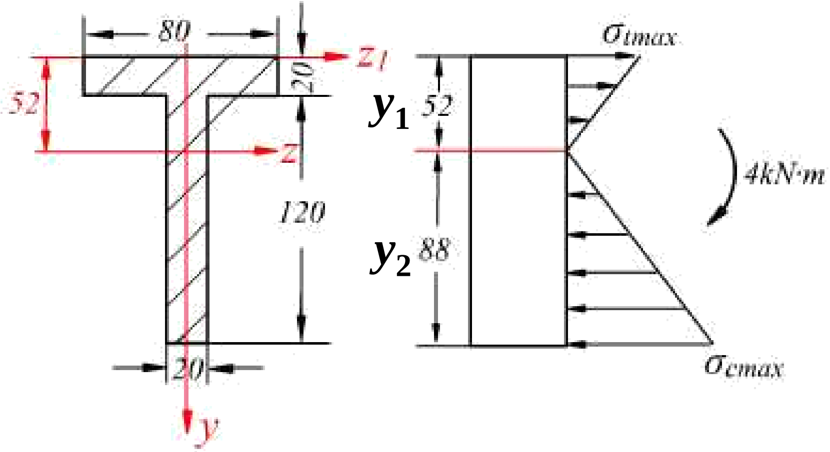


分析：作弯矩图，寻找需要校核的截面（可能的危险截面）

要同时满足 $\sigma_{t,\max}\le[\sigma_t]$，$\sigma_{c,\max}\le[\sigma_c]$







（1）求约束力 $F_A = 2.5\text{kN}$ $F_B = 10.5\text{kN}$

（2）作弯矩图

最大正弯矩 *C*，最大负弯矩 *B*

（3）*B* 截面校核（上拉下压）

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{4\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.64\times10^{-6}}$$

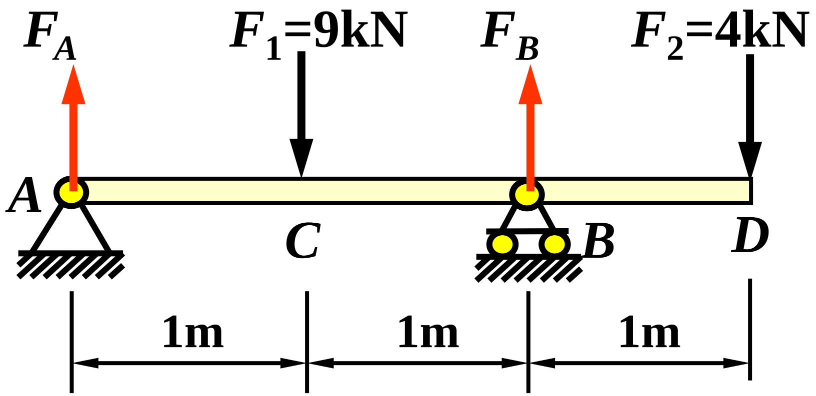
$$= 27.2\times10^6\,\text{Pa} = 27.2\text{MPa} < [\sigma_t]$$

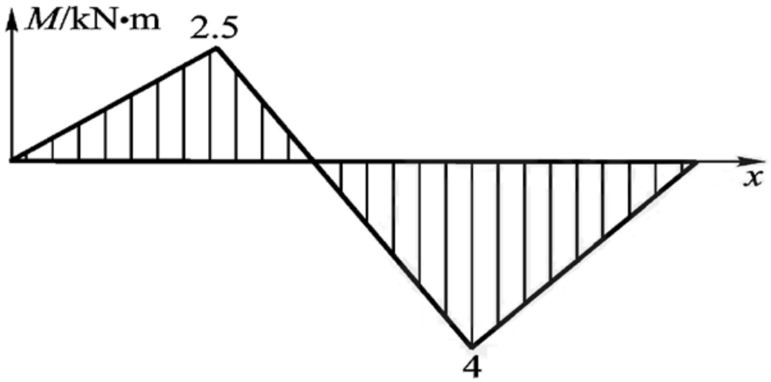
B 截面最大拉应力发生在上边缘

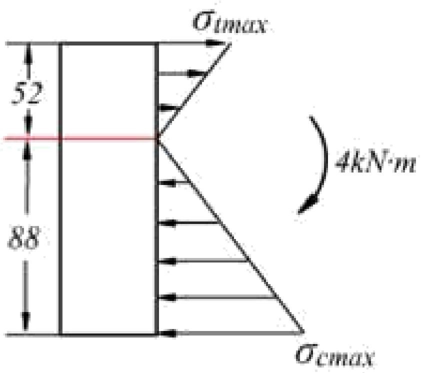
$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{4\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.64\times10^{-6}}$$

$$= 46.1\times10^6\,\text{Pa} = 46.1\text{MPa} < [\sigma_c]$$

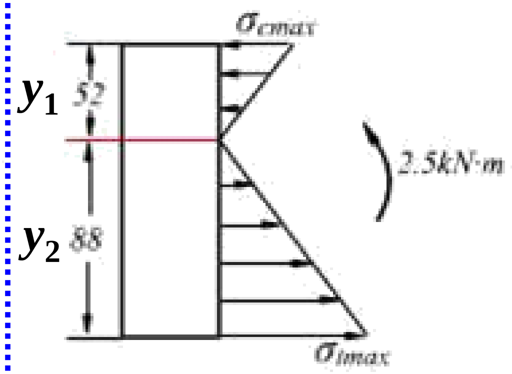
B 截面最大压应力发生在下边缘







B截面



C截面

（2）作弯矩图

（3）*B* 截面校核

$$\sigma_{t,\max} = 27.2\text{MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c,\max} = 46.1\text{MPa} < [\sigma_c]$$

（4）*C* 截面要不要校核？ 要

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_C y_2}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.64\times10^{-6}}$$

$$= 28.8\times10^6\text{Pa} = 28.8\text{MPa} < [\sigma_t]$$

$$\because\ M_B > M_C,\ y_2 > y_1 \quad \therefore\ \sigma_{cB} > \sigma_{cC}$$

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_C y_1}{I_z}$$

强度条件满足

本讲小结

- 9.1 纯弯曲
- 9.2 弯曲正应力的强度条件及其应用
- 9.3 提高梁弯曲强度的一些措施