附录A　平面图形的几何性质

目录

CONTENTS

A-2　惯性矩、惯性积、极惯性矩、惯性半径

一、惯性矩：

绕轴

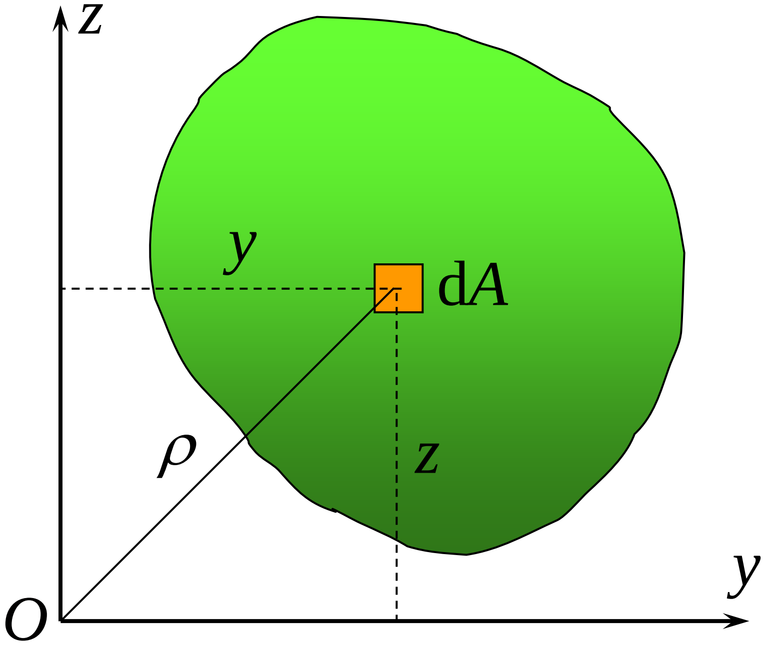
是面积与它到轴的距离的平方之积（二次矩）。

衡量一个物体抵抗转动的能力

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

恒为正值



二、极惯性矩：

绕点

是面积对极点的二次矩。

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (y^2 + z^2) \mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A + \int_A z^2 \mathrm{d}A = I_z + I_y$$

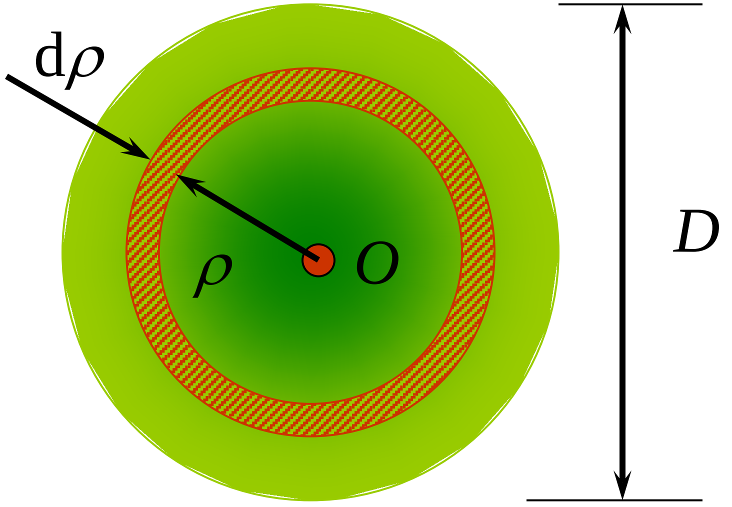
$$I_p=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

单位：mm⁴或m⁴。

纯几何量，无物理意义。

★ **对于实心圆截面：**

$$I_p=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$
$$=\int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{D/2} \rho^3 \mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\pi D^4}{32}$$



$$\mathrm{d}A = 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho$$

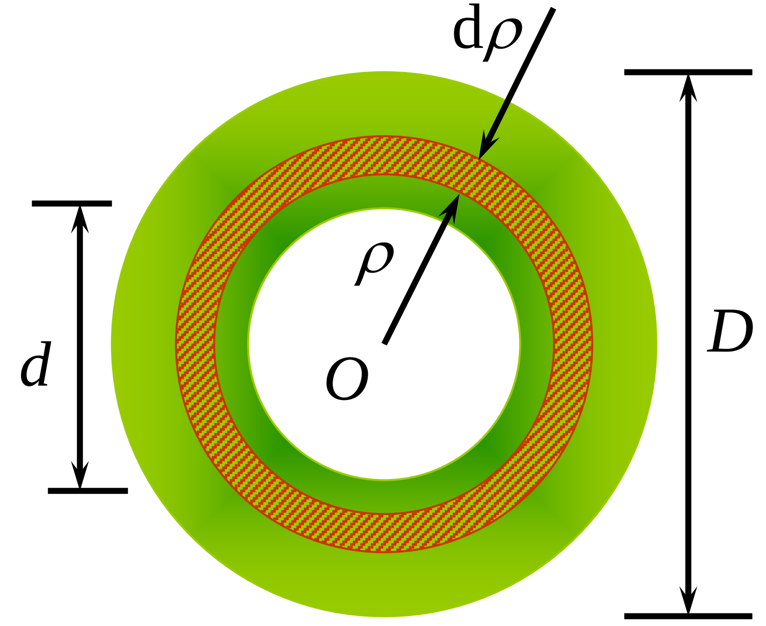
★ **对于空心圆截面：**

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

$$= \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

$$= \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \qquad (\alpha = \frac{d}{D})$$



$$\mathrm{d}A = 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho$$

惯性矩、极惯性矩的计算具有可加性。 $I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$

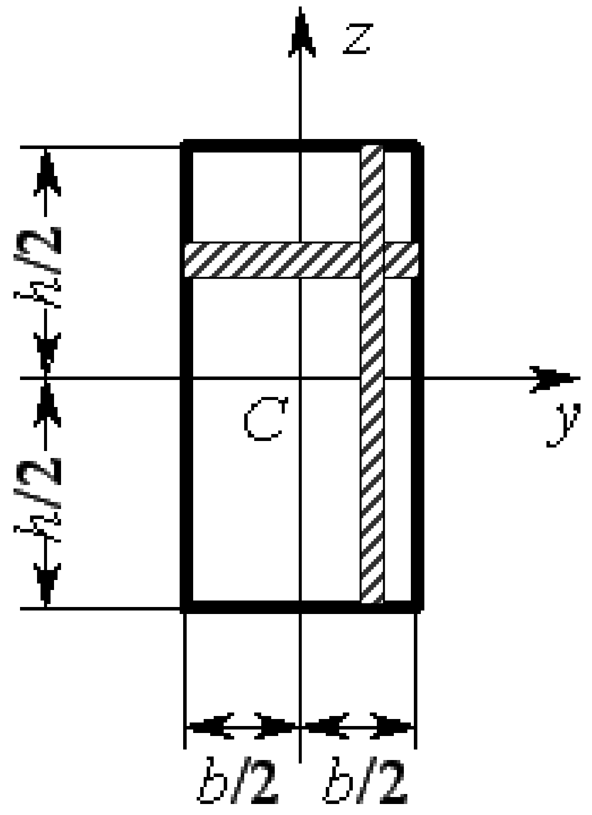
例4-3 求矩形对形心轴的惯性矩。

$\mathrm{d}A = b\mathrm{d}z$

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b\mathrm{d}z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 h\mathrm{d}y = \frac{b^3 h}{12}$$

$\mathrm{d}A = h\mathrm{d}y$



对哪根轴的惯性矩，那就与该轴垂直的线的长度三次方。

惯性半径

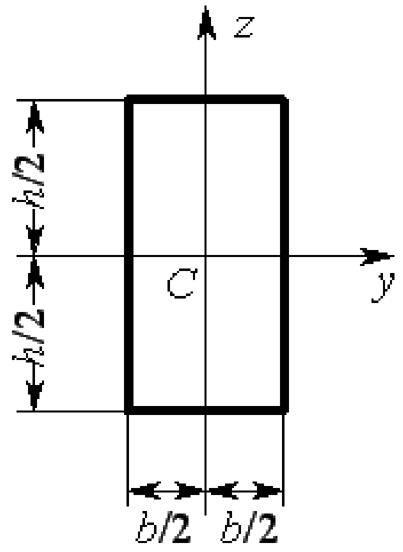
有时把惯性矩写成面积 A 与某一长度的平方的乘积，如

$$I_y = A \cdot i_y^2 \qquad I_z = A \cdot i_z^2$$

则 $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$ 称为**惯性半径**

对于矩形 $$I_y = \frac{bh^3}{12} \qquad A = bh$$

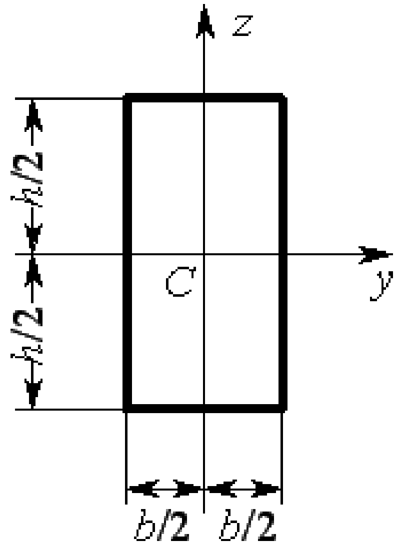
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} h$$

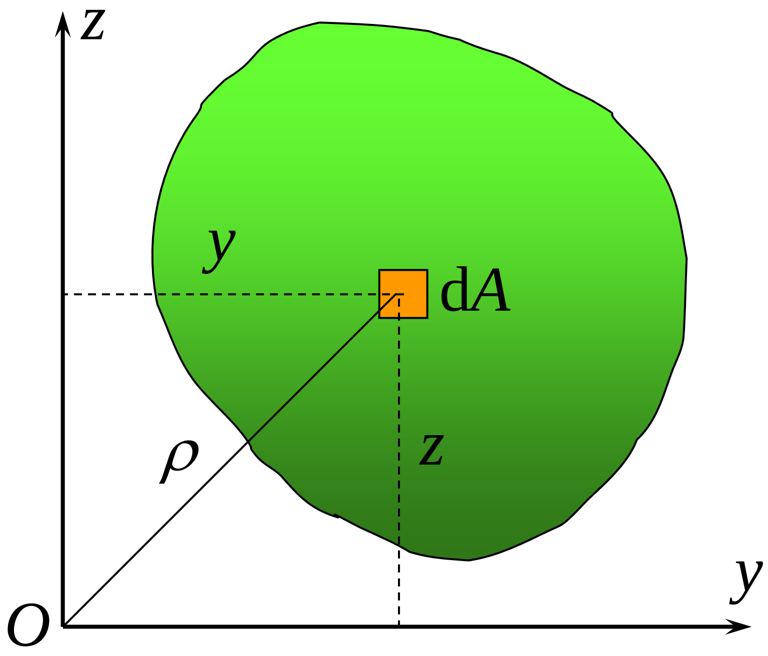


三、惯性积：面积与其到两轴距离之积。

$$I_{yz}=\int_A yz\mathrm{d}A$$

如果 y 或 z 是对称轴，则 $I_{yz}=0$





本讲小结

A–1 静矩和形心

A–2 惯性矩、惯性积和惯性半径

A–3 平行移轴公式 组合图形的惯性矩计算