第7章 扭 转

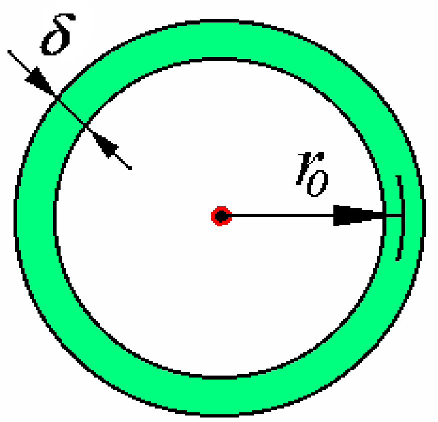
§7.3 薄壁圆筒的扭转

目录

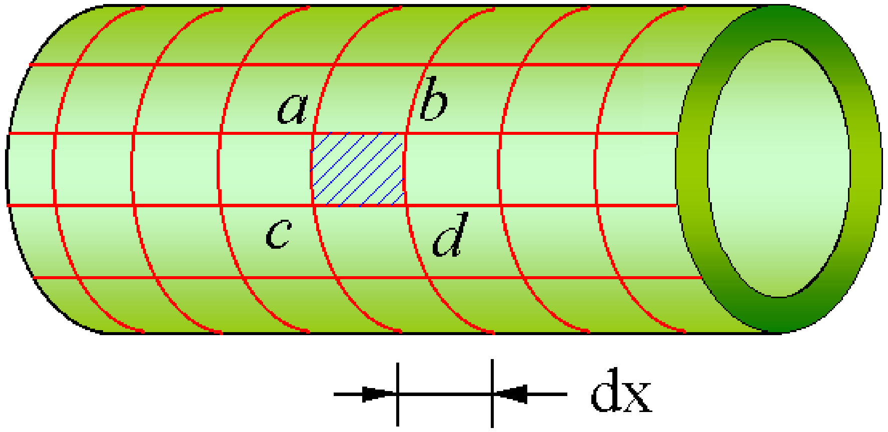
CONTENTS

一、应力分析

薄壁圆筒：壁厚 $\delta \leq \frac{1}{10} r_0$ （r_0：为平均半径）



实验：



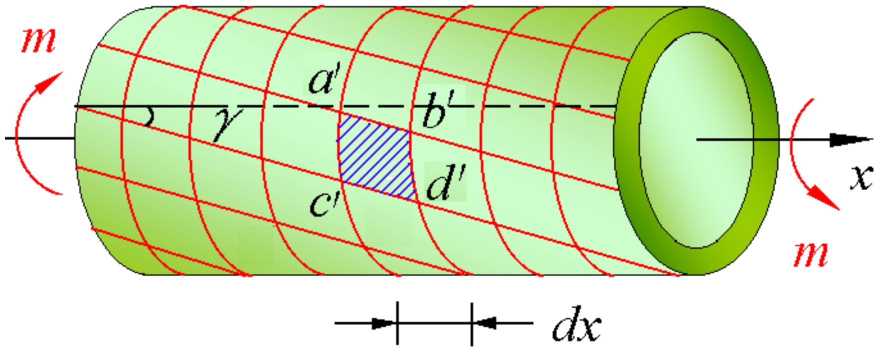
1.实验前：

①绘圆周线和纵向线

②施加一对外力偶 M_e

一、应力分析

2.实验后：



①圆筒表面的各圆周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线作相对转动。

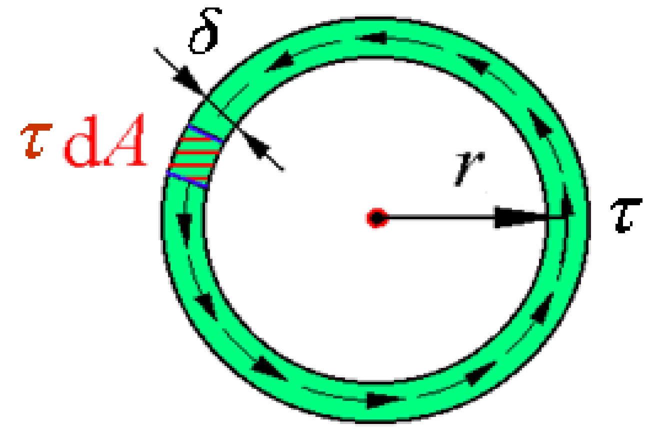
（无正应力，无拉压）

②各纵向线均倾斜了同一微小角度 γ。

③所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形。

（有切应力，圆周各点处切应力的方向于圆周相切，因厚度很小，认为切应力大小相等。）

3.公式推导：



剪切面积 $A = 2\pi r \cdot \delta$

取微面积d*A*

微面积的剪力 $\mathrm{d}F_S = \tau \cdot \mathrm{d}A$

剪力矩

$$\sum(\mathrm{d}F_S \cdot r) = \tau \cdot r \cdot \sum \mathrm{d}A$$

$$= \tau \cdot r \cdot 2\pi r\delta$$

$$= 2\pi r^2 \delta\tau$$

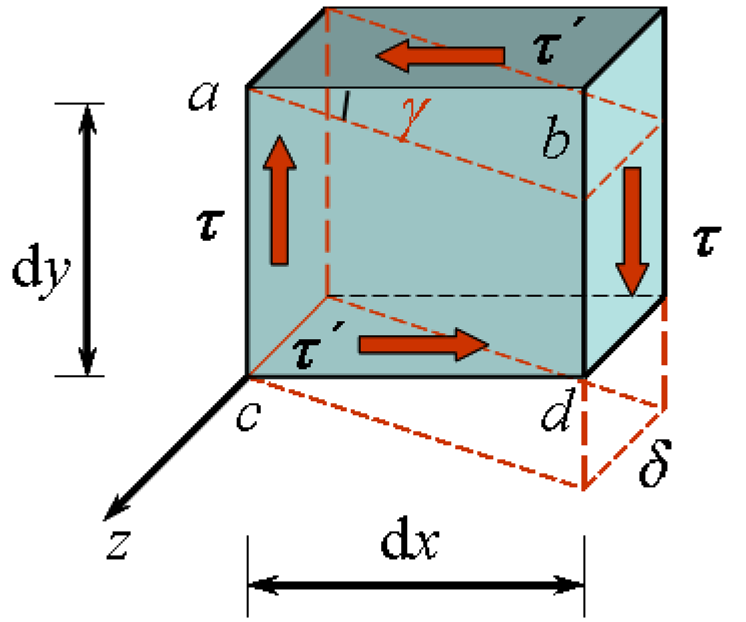
力矩平衡 $M_e = 2\pi r^2 \delta\tau$

切应力大小 $\tau = \dfrac{M_e}{2\pi r^2 \delta}$

二、切应力互等定理

左右两侧力偶 $(\tau\delta \mathrm{d}y)\mathrm{d}x$

因平衡，上下两面也必有切应力的力偶，假设切应力为 τ'**，力偶为** $(\tau'\delta \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$



$$\sum M_z = 0$$

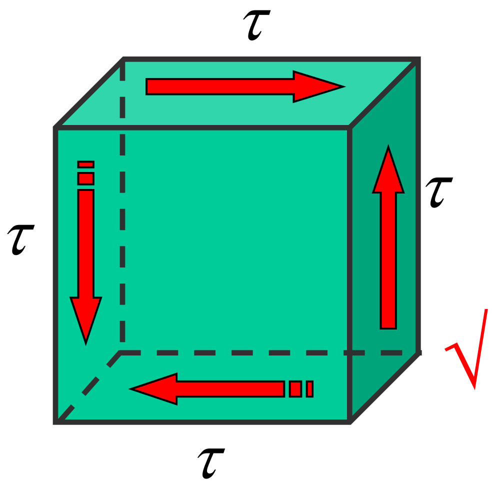
$$(\tau\delta \mathrm{d}y)\mathrm{d}x = (\tau'\delta \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$$

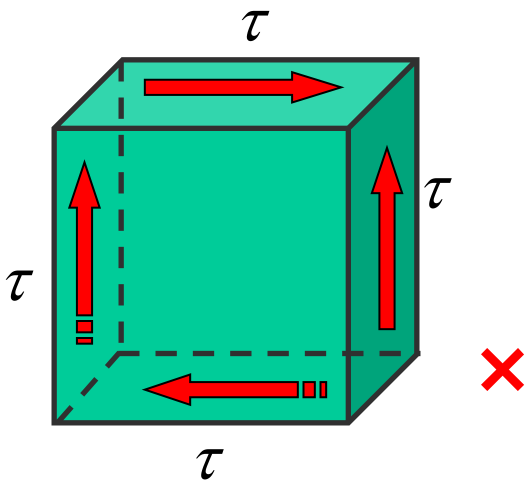
故 $\tau = \tau'$

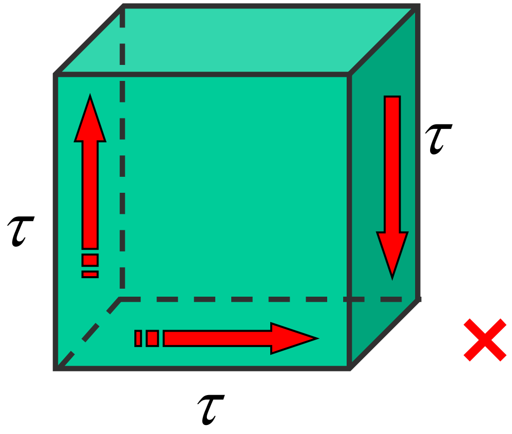
上式称为**切应力互等定理（也称为切应力双生定理）**。

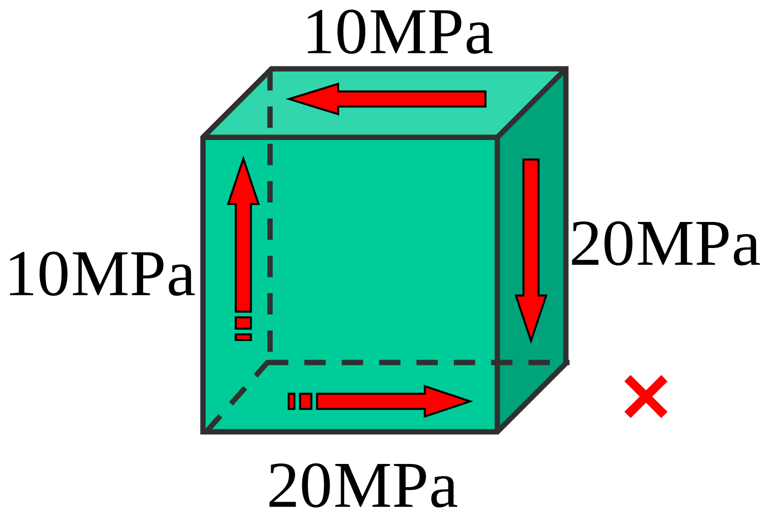
该定理表明：在单元体相互垂直的两个平面上，切应力必然成对出现，且数值相等，两者都垂直于两平面的交线，其方向则共同指向或共同背离该交线。

试根据切应力互等定理，判断图中所示的各单元体上的切应力是否正确。



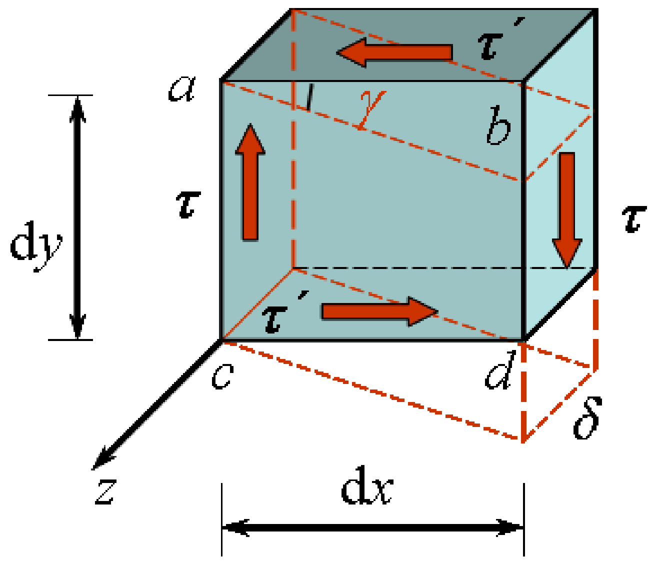


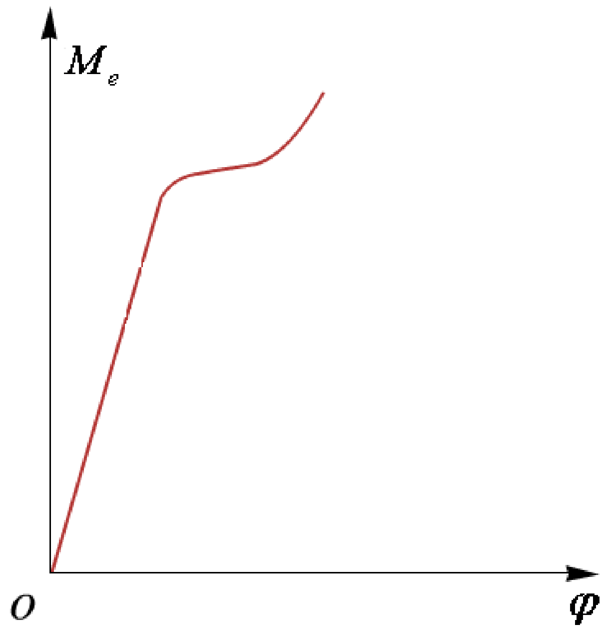


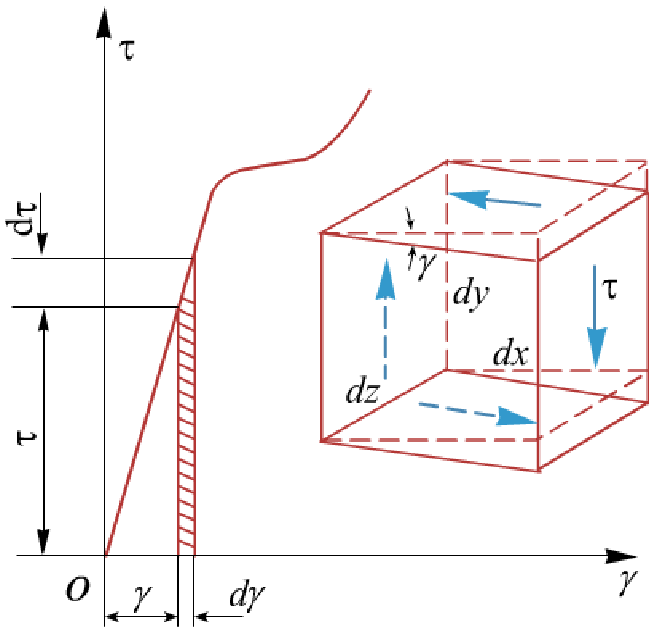


三、剪切胡克定律

单元体的四个侧面上只有切应力而无正应力作用，这种情况称为纯剪切。







剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \tan\alpha$$

剪切胡克定律 $\tau = G \cdot \gamma$

式中：G 是材料的一个弹性常数，称为剪切弹性模量，因 γ 无量纲，故 G 的量纲与 τ 相同。

剪切弹性模量、弹性模量和泊松比是表明材料弹性性质的三个常数。对各向同性材料，这三个弹性常数之间存在下列关系：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

可见，在三个弹性常数中，只要知道任意两个，第三个量就可以推算出来。