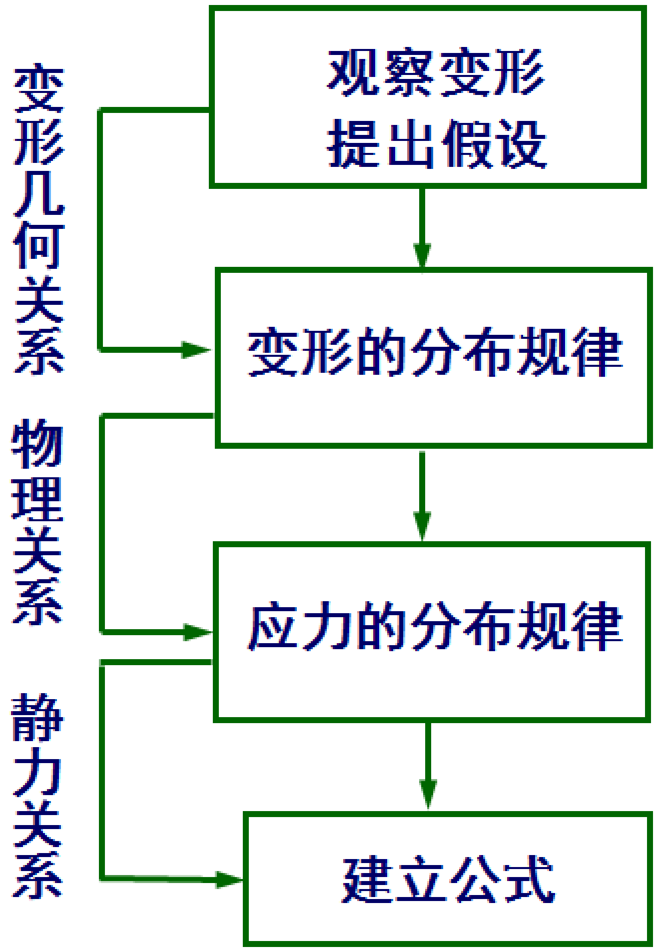
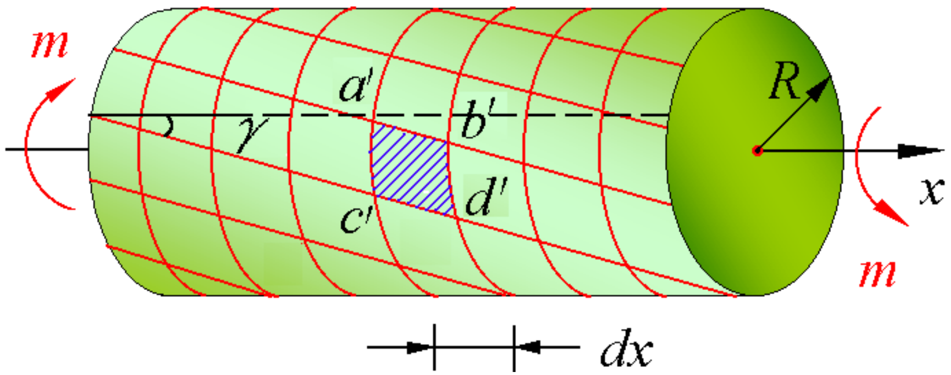
第7章 扭转

§7.4 等直圆轴扭转时的切应力

等直圆杆横截面应力分析：



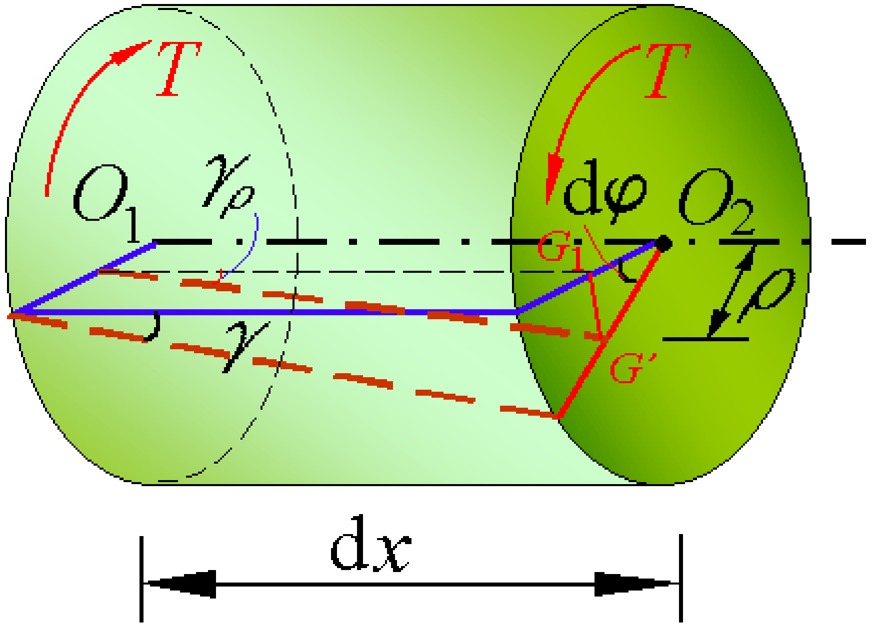
一、等直圆杆扭转实验观察：



1. 横截面变形后仍为平面，半径仍保持直线；
2. 轴向无伸缩，两截面间距离不变；（无正应力）
3. 纵向线变形后仍为平行。

（圆轴扭转的平面假设）

2. 变形几何关系：



$$\gamma_\rho \approx \tan\gamma_\rho = \frac{\overline{G_1G'}}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho \cdot \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\gamma_\rho = \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$$

距圆心为 ρ 任一点处的 γ_ρ 与到圆心的距离 ρ 成正比。

$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ —— **扭转角沿长度方向变化率。**

对于半径为 R 的圆轴表面

$$\boxed{\gamma = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$$

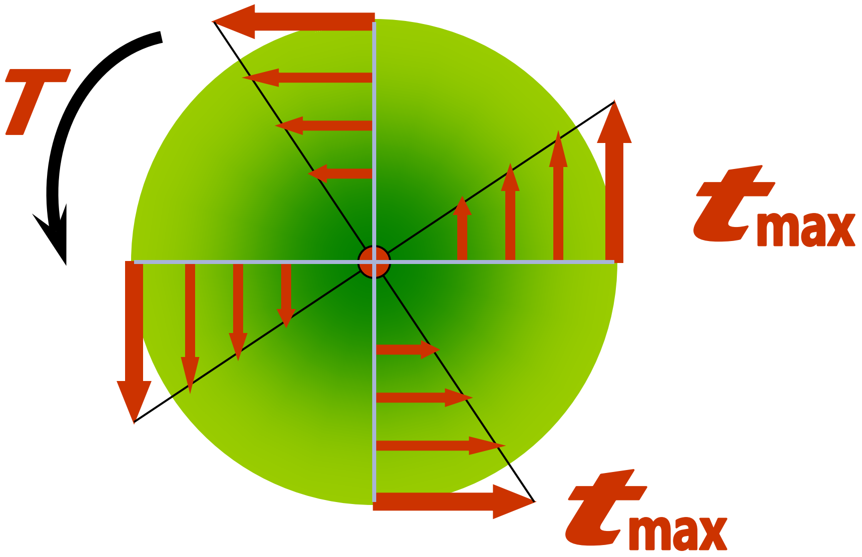
3. 物理关系：

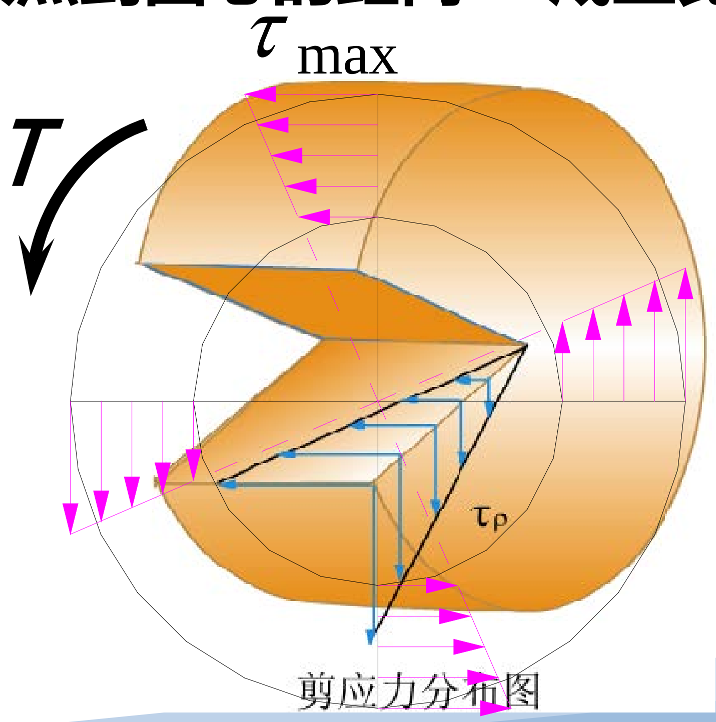
剪切胡克定律： $\tau = G\cdot\gamma$

代入上式得： $\tau_\rho = G\cdot\gamma_\rho = G\cdot\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \rho\cdot G\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$

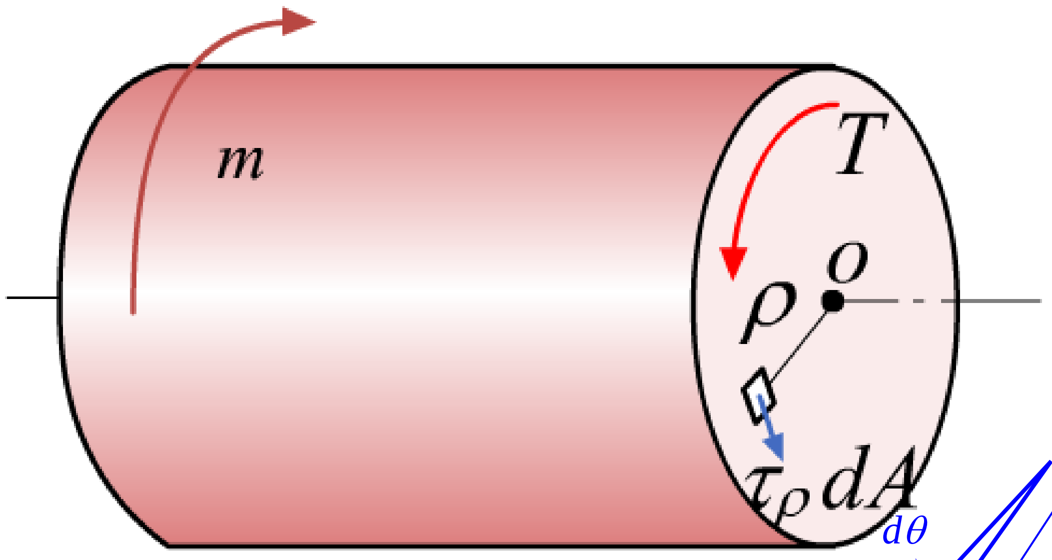
$$\boxed{\tau_\rho = \rho G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$$

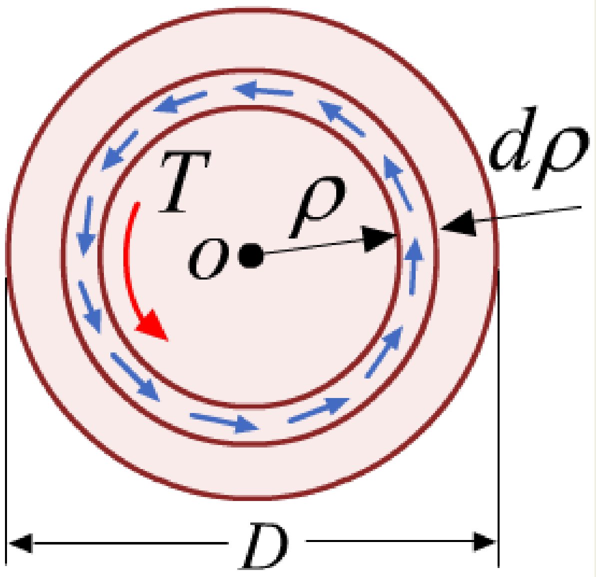
横截面上任意点的剪应力 τ_ρ 与该点到圆心的距离 ρ 成正比

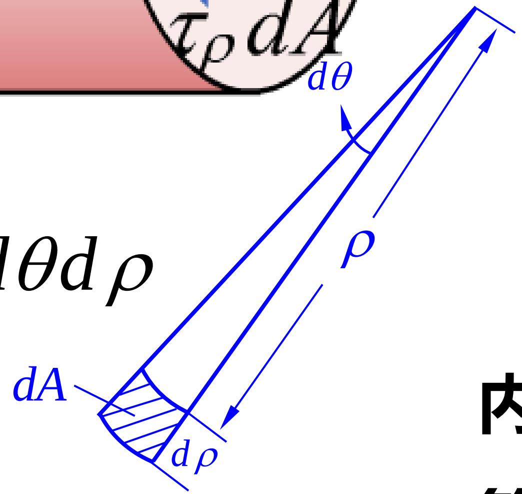




4. 静力学关系：







取微面积： $dA = \rho d\theta d\rho$

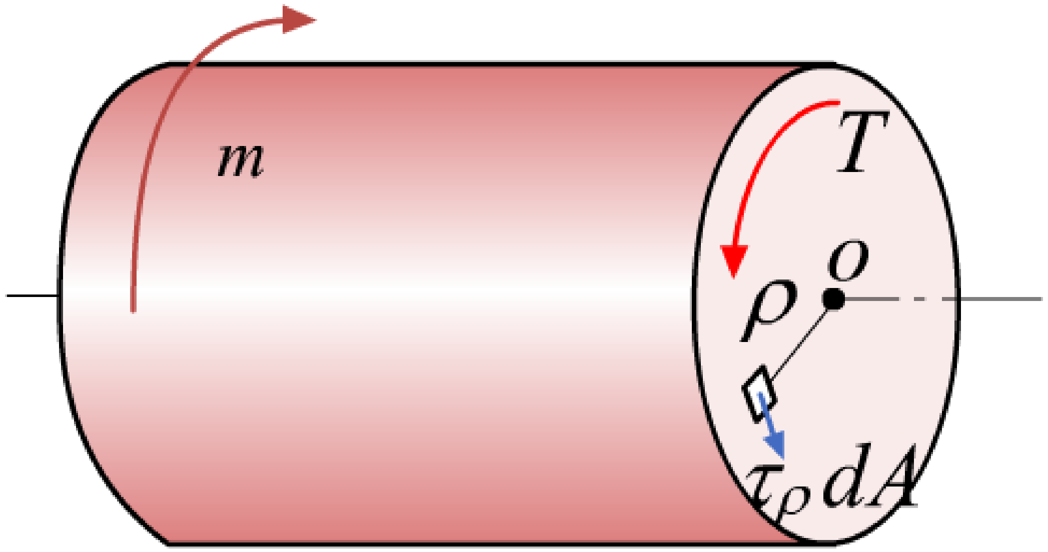
微内力： $\tau_\rho dA$

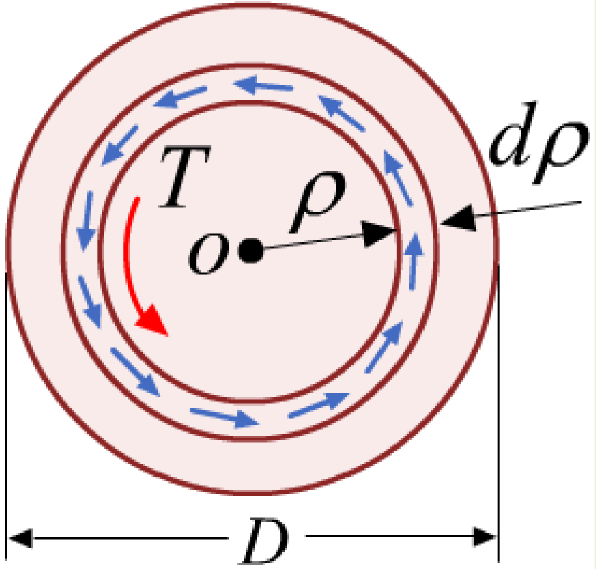
对圆心的力矩： $\rho \cdot \tau_\rho dA$

内力系对圆心的力矩： $\int_A \rho \cdot \tau_\rho dA$

内力系对圆心的力矩等于扭矩：

$$T = \int_A \rho \cdot \tau_\rho dA$$





$$T=\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A = G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\boxed{\int_A \rho^2 \mathrm{d}A} \Rightarrow \text{令}\quad I_p=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

$$\tau_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

$$T=\cancel{G}I_p\cancel{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$$

横截面对圆心的极惯性矩

联立物理关系式 $\tau_\rho = \rho\cancel{G}\cancel{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$　　得：$\boxed{\tau_\rho=\frac{T\rho}{I_p}}$

$$\tau_\rho = \frac{T \cdot \rho}{I_p}$$——横截面上距圆心为 ρ 处任一点切应力计算公式。

4. 公式讨论：

① 仅适用于各向同性、线弹性材料，在小变形时的等圆截面直杆。

② 式中：T—横截面上的扭矩，由截面法通过外力偶矩求得。

ρ—该点到圆心的距离。

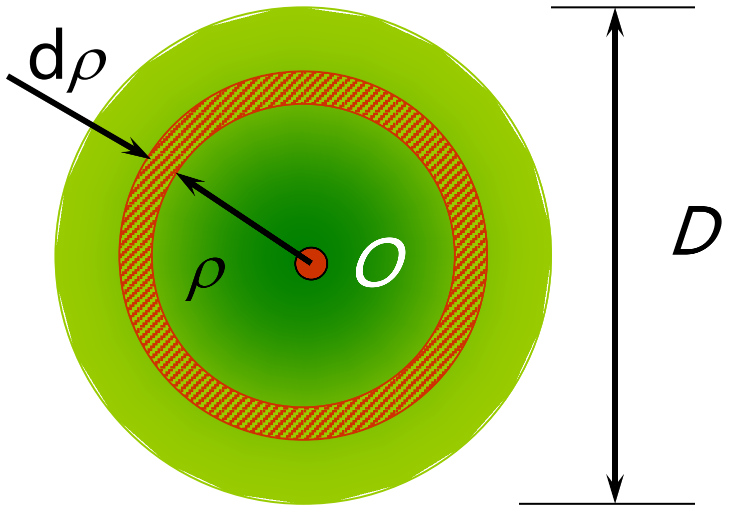
I_p—极惯性矩，纯几何量，无物理意义。

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$ **单位：mm⁴或m⁴。**

③ 尽管由实心圆截面杆推出，但同样适用于空心圆截面杆，只是 I_p 值不同。

★ **对于实心圆截面：**

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$



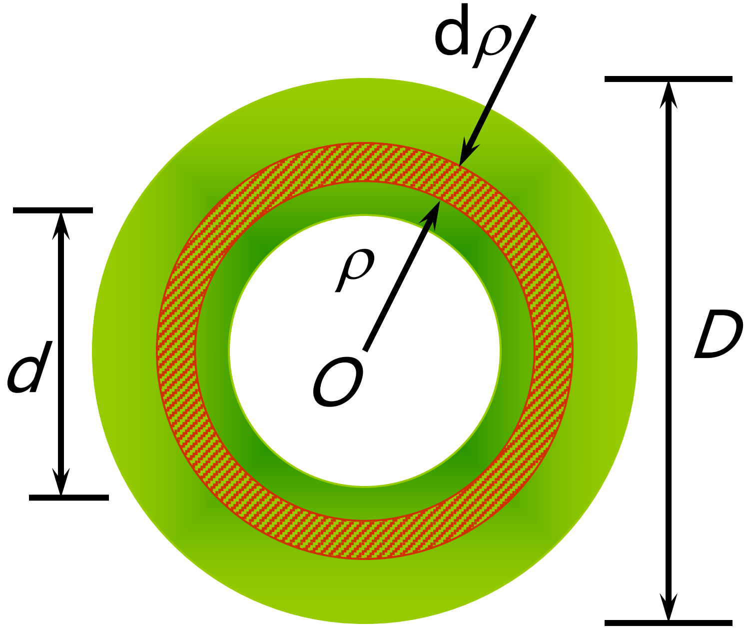
★ **对于空心圆截面：**

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

$$= \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

$$= \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \qquad (\alpha = \frac{d}{D})$$



④ 确定最大剪应力：

由 $\tau_\rho = \dfrac{T\cdot\rho}{I_p}$ **知：当** $\rho = R,\quad \tau_\rho \to \tau_{\max}$

$$\therefore \qquad \tau_{\max} = \frac{T\cdot R}{I_p} = \frac{T}{\boxed{I_p/R}} = \frac{T}{W_t} \quad (令\ W_t = \frac{I_p}{R})$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}}$$

$\sigma = \dfrac{F}{A}$ 拉压

W_t — 抗扭截面系数（抗扭截面模量），

纯几何量，单位：mm³或m³。

★ **对于实心圆截面：** $W_t = I_p/R = \pi D^3/16$

★ **对于空心圆截面：** $W_t = I_p/R = \pi D^3(1-\alpha^4)/16$

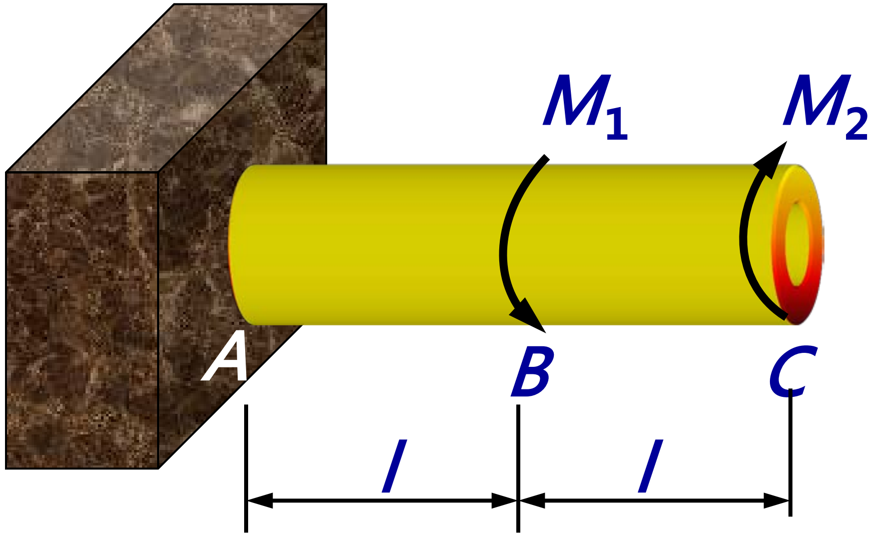
实心轴与空心轴 I_p 与W_t 对比

实心轴	空心轴
$I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}$	$I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$
$W_t = \dfrac{I_p}{R} = \dfrac{\pi D^3}{16}$	$W_t = \dfrac{I_p}{R} = \dfrac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$

例题 图示空心圆轴外径D=100mm，内径d=80mm，M_1=6kN•m，M_2=4kN•m，材料的切变模量 G=80GPa。

（1）画轴的扭矩图；

（2）求轴的最大切应力，并指出其位置。



解:（1）画轴的扭矩图

*BC*段　$T_1+M_2=0$

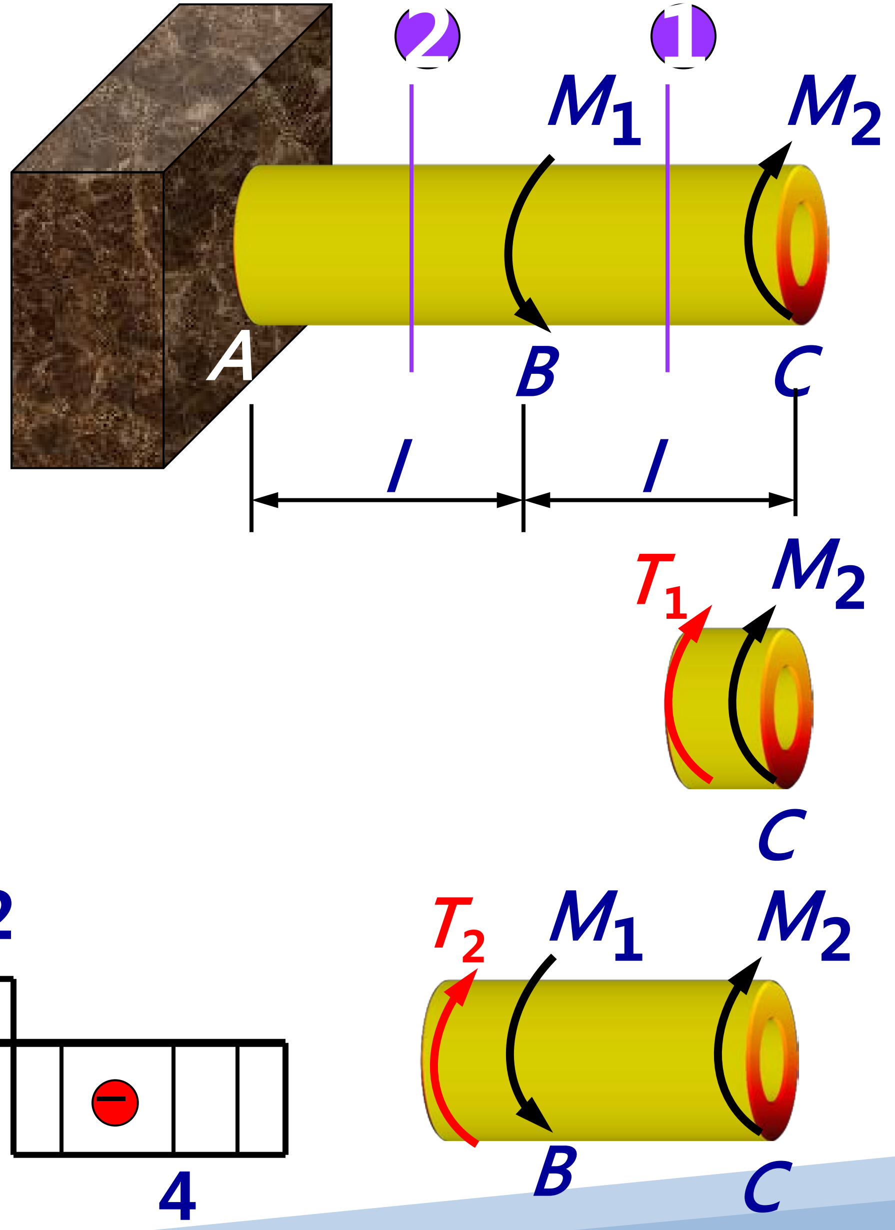
T_1 = -4kN•m（-）

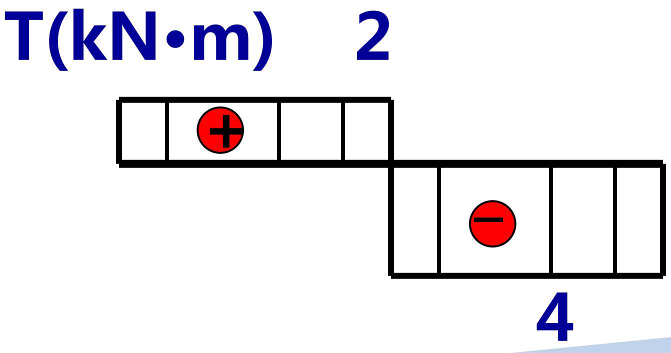
*AB*段　$T_2+M_2-M_1=0$

T_2 =2kN•m（+）

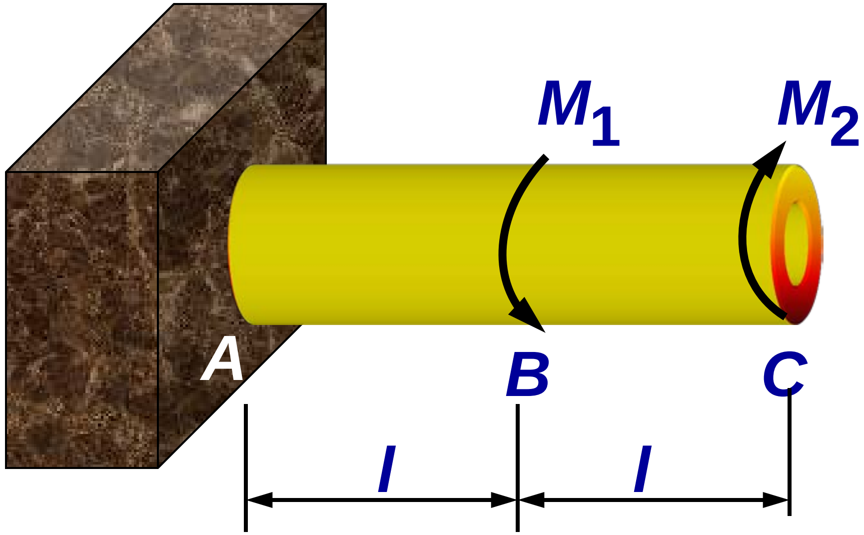
最大扭矩发生在*BC*段

T_{max}=4kN•m



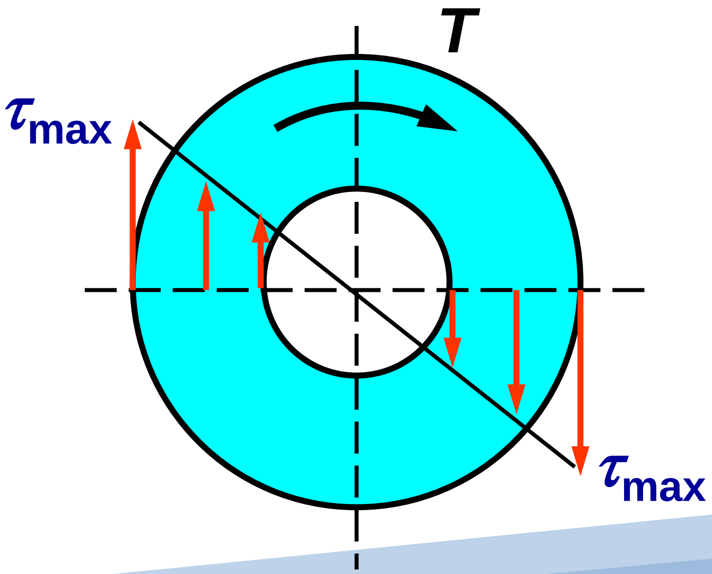


（2）求轴的最大切应力,并指出其位置



$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t}$$

$$= \frac{T_{max}}{\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)} = 34.5\text{MPa}$$



最大切应力发生在截面的周边上,且垂直于半径。