

# 第7章 扭转

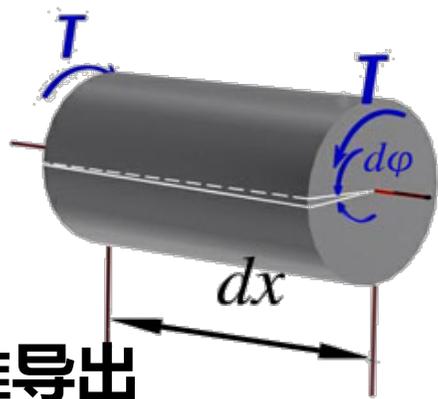
## §7.6 扭转变形计算 刚度条件

# 目录

## CONTENTS

- 1 圆轴扭转时的变形
- 2 刚度条件

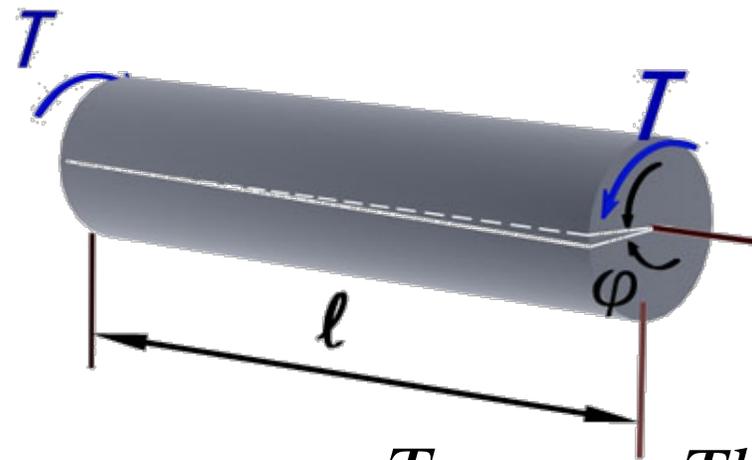
# 一、圆轴扭转时的变形



之前推导出

$$T = GI_p \frac{d\phi}{dx}$$

$$d\phi = \frac{T}{GI_p} dx$$

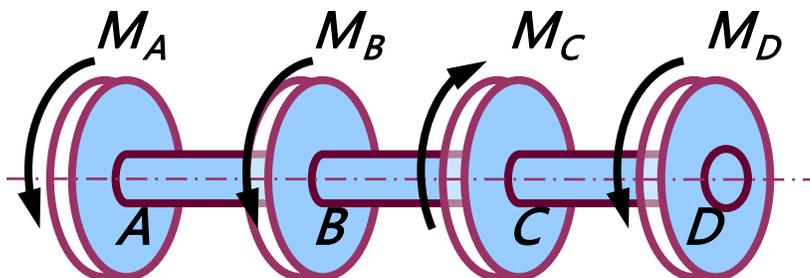


$$\phi = \int_l d\phi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx = \frac{Tl}{GI_p}$$

$\phi$  相对扭转角

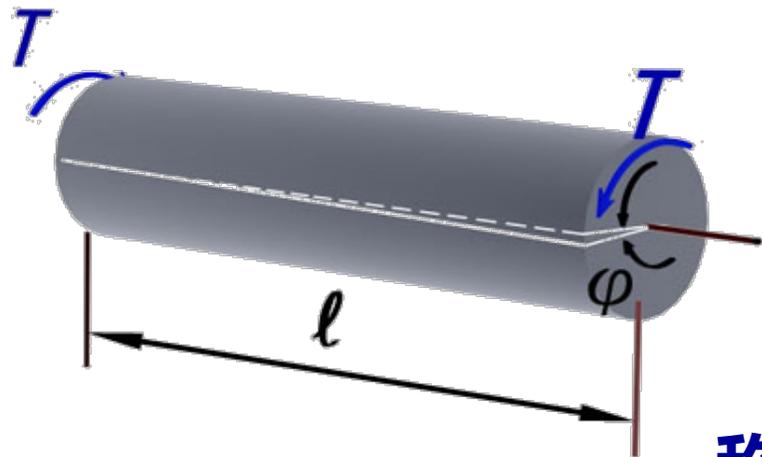
$GI_p$  抗扭刚度

分段轴或阶梯轴：



$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i l_i}{GI_{pi}}$$

## 二、刚度条件



$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

用  $\varphi'$  表示变化率  $\frac{d\varphi}{dx}$

称为单位长度扭转角(相当于  $l=1$ )

$$\varphi' = \frac{T}{GI_p} = \frac{\varphi}{l} \quad (\text{rad/m})$$

$$\varphi' = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \quad (^\circ/\text{m})$$

**扭转刚度条件**  $\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\varphi']$

许用单位长度扭转角

## 扭转强度条件（与应力相关）

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \leq [\tau]$$

已知  $T$ 、 $D$  和  $[\tau]$ ，校核强度

已知  $T$  和  $[\tau]$ ，设计截面

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}$$

已知  $D$  和  $[\tau]$ ，确定许可载荷

## 扭转刚度条件（与应变相关）

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\varphi']$$

已知  $T$ 、 $D$  和  $[\varphi']$ ，校核刚度

已知  $T$  和  $[\varphi']$ ，设计截面

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

已知  $D$  和  $[\varphi']$ ，确定许可载荷

**例 1** 某传动轴所承受的扭矩  $T = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$  , 轴的直径  $d = 40 \text{ mm}$ 。材料的  $[\tau] = 40 \text{ MPa}$  , 切变模量  $G = 80 \text{ GPa}$  , 许用单位长度扭转角  $[\varphi'] = 1^\circ/\text{m}$ 。试校核该轴的强度和刚度。

**解：(1) 校核轴的强度**

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \times 200}{3.14 \times (40 \times 10^{-3})^3} \\ &= 15.9 \times 10^6 \text{ Pa} = 15.9 \text{ MPa} < [\tau]\end{aligned}$$

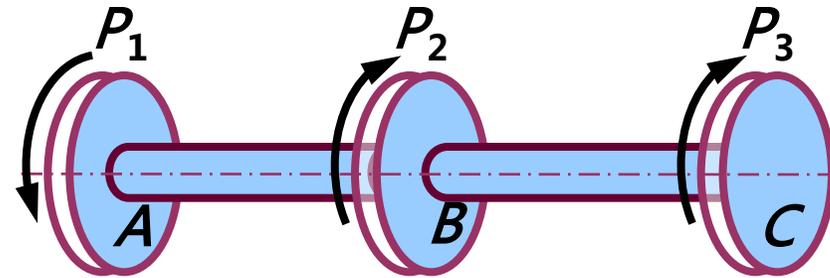
**(2) 校核轴的刚度**

$$\begin{aligned}\varphi'_{\max} &= \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{T}{G \frac{\pi d^4}{32}} \times \frac{180}{\pi} = \frac{32 \times 200}{80 \times 10^9 \times 3.14 \times (40 \times 10^{-3})^4} \times \frac{180}{3.14} \\ &= 0.57^\circ/\text{m} < [\varphi']\end{aligned}$$

**该轴满足强度和刚度条件。**

例2 某传动轴设计要求转速  $n = 500 \text{ r/min}$  , 输入功率  $P_1 = 50 \text{ kW}$  , 输出功率分别  $P_2 = 20 \text{ kW}$  及  $P_3 = 30 \text{ kW}$  , 已知 :  $G = 80 \text{ GPa}$  ,  $[\tau] = 70 \text{ MPa}$  ,  $[\varphi'] = 1^\circ/\text{m}$  , 试确定 :

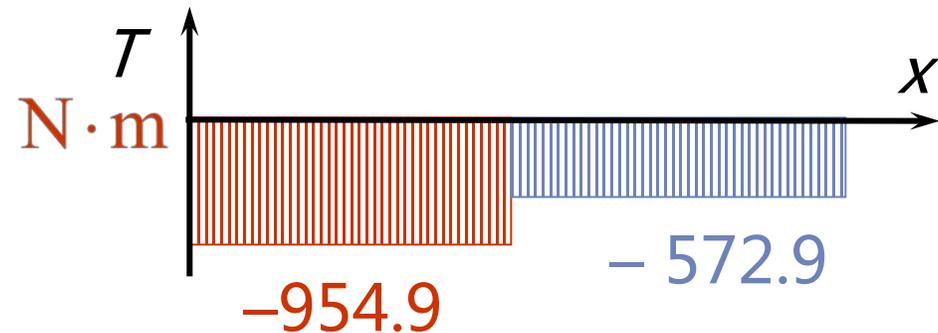
- ①  $AB$  段直径  $D_1$  和  $BC$  段直径  $D_2$  ?
- ② 若全轴选同一直径 , 应为多少 ?
- ③ 主动轮与从动轮如何安排合理 ?



解 : ① 图示状态下, 扭矩如图

$$T_{AB} = 9549 \frac{P_1}{n} = 954.9 (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$T_{BC} = 9549 \frac{P_3}{n} = 572.9 (\text{N} \cdot \text{m})$$



由强度条件得：

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} \geq \frac{T}{[\tau]}$$

AB段

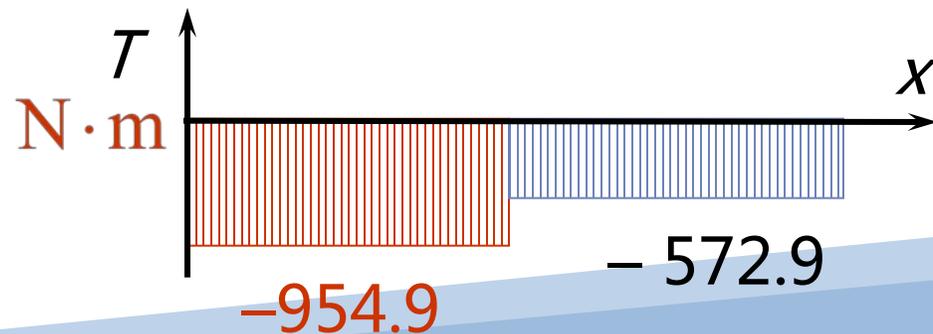
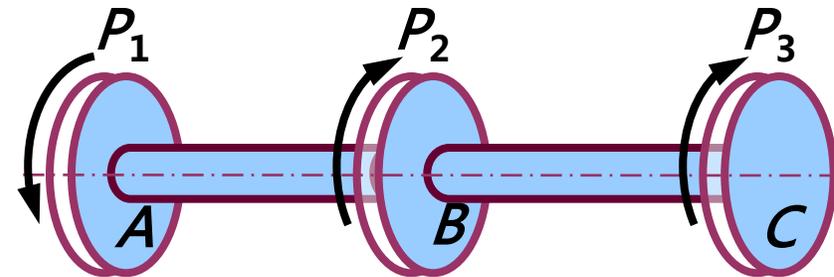
$$D_1' \geq \sqrt[3]{\frac{16T_1}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 954.9}{3.14 \times 70 \times 10^6}} = 41.2 \text{ mm}$$

BC段

$$D_2' \geq \sqrt[3]{\frac{16T_2}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 572.9}{3.14 \times 70 \times 10^6}} = 34.6 \text{ mm}$$

由刚度条件得：

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \geq \frac{T}{G[\varphi']} \times \frac{180}{\pi}$$



由强度条件得： $D_1' \geq 41.2 \text{ mm}$        $D_2' \geq 34.6 \text{ mm}$

由刚度条件得： $I_p = \frac{\pi D^4}{32} \geq \frac{T}{G [\varphi']} \times \frac{180}{\pi}$

$$D_1'' \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 T_1}{\pi^2 G [\varphi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 \times 954.9}{3.14^2 \times 80 \times 10^9 \times 1}} = 51.4 \text{ mm}$$

$$D_2'' \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 T_2}{\pi^2 G [\varphi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 180 \times 572.9}{3.14^2 \times 80 \times 10^9 \times 1}} = 45.2 \text{ mm}$$

综上所述，得： $D_1 \geq 51.4 \text{ mm}$ ， $D_2 \geq 45.2 \text{ mm}$

②若全轴选同一直径时       $D \geq 51.4 \text{ mm}$

③ 轴上的最大扭矩（绝对值）越小越合理，所以，1轮和2轮应该换位。换位前后，轴的扭矩如图所示。

